МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Київ
КПІ імені Ігоря Сікорського
2023

Журавська Г.В. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл. Збірник задач / укладачі Журавська Г.В., Карпалюк Т.О., Копась І.М., Кулик Г.М., Рева Н.В., Степаненко Н.В. – Київ, «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2023 – 97 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ імені Ігоря Сікорського (протокол №8 від 2.06.23) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол №6 від 17.05.23)

Електронне навчальне видання

Теорія границь

Диференціальне числення функції однієї змінної

Невизначений інтеграл

Збірник задач

Укладачі: Журавська Г.В. – доц., к.ф.-м.н.,
Карпалюк Т.О. – к.ф.-м.н.,
Копась І.М. – доц., к.ф.-м.н.,
Кулик Г.М. – доц., к.ф.-м.н.,
Рева Н.В. – доц., к.ф.-м.н.,
Степаненко Н.В. – доц., к.ф.-м.н.

Відповідальний редактор: Шраменко Володимир Миколайович – доцент, канд. фіз.-мат. наук.

Рецензенти: **Тимофієва Єлизавета Миколаївна**, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики навчально-наукового інституту фізико-технічних і комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Задерей Надія Миколаївна, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

Зміст

Вступ

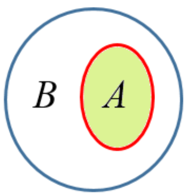
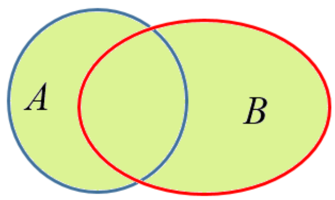
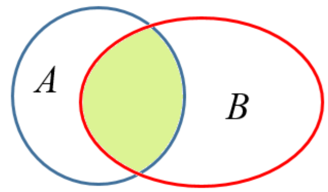
Збірник задач призначено для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка». Завдання в збірнику системно розташовані відповідно до розділів і тем силабусу дисципліни «Вища математика 1. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної».

На початку кожної теми надано короткий довідковий матеріал (означення, теореми та формули). До всіх завдань на обчислення подаються відповіді у кінці збірника. Частина відповідей ілюструється графіками та малюнками. Для зручності користування збірником, після завдань до кожної теми є посилання на відповіді, звідки також можна повернутися до завдань за допомогою посилання після відповідей.

Розділ 1. Теорія границь.

Тема 1.1. Множини. Основні поняття. Логічні символи. Операції над множинами. Числові множини. Множина дійсних чисел та їхні властивості. Модуль дійсного числа, його властивості. Окіл точки.

Операції над множинами

 Множина A є підмножиною B $A \subset B$ • $A \subset A$ • $\varnothing \subset A$ • $A = B$ тоді і лише тоді коли $A \subset B$ і $B \subset A$	 Об'єднання множин A та B $A \cup B$ Властивості: • $A \cup B = B \cup A$ • $A \cup (B \cup C) = =(A \cup B) \cup C$ • $A \subset (A \cup B)$ • $A \cup A = A$ • $A \cup \varnothing = A$ • $A \subset B$ тоді і лише тоді коли $A \cup B = B$	 Перетин множин A та B $A \cap B$ Властивості: • $A \cap B = B \cap A$ • $A \cap (B \cap C) =(A \cap B) \cap C$ • $A \cap B \subset A$ • $A \cap A = A$ • $A \cap \varnothing = \varnothing$ • $A \subset B$ тоді і лише тоді коли $A \cap B = A$

Модуль дійсного числа

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Метод математичної індукції

Для того щоб довести, що виконується деяке твердження для будь-якого натурального числа n, достатньо:

1) довести, що твердження виконується для $n = 1$;

2) припускаючи, що твердження виконується для будь-якого натурального числа n, довести, що твердження також виконується для наступного натурального числа $n + 1$.

1.1.1. Задано множини $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 13\}$, $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 11,\ 13\}$ та $C = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$. Знайти $A \cap B,\ A \cup B,\ A \cup (B \cap C),\ B \cap (C \cap A)$.

1.1.2. Задано множини $A = \{x | x \in (-3,\ 5]\}$, $B = \{x | x \in [0, 6)\}$ та $C = \{x | x \in (-1, 2)\}$.

Побудувати на координатній прямій множини $A \cap B, A \cup B, A \cup (B \cap C), B \cap (C \cap A)$.

1.1.3. Задано множини $A = \{(x, y) |\ 1 \le x \le 3,\ 0 \le\ y \le 3\}$, $B = \{(x, y) |\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le\ y \le 4\}$ та $C = \{(x, y) | 0 \le x \le 4, 1 \le\ y \le 2\}$. Побудувати на координатній площині множини $A \cap B,\ A \cup B,\ A \cup (B \cap C),\ B \cap (C \cap A)$.

1.1.4. Задані множини описати перерахуванням усіх елементів.

1) $A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^3 - 3x^2 - 4x = 0\}$;

2) $A = \{x \in \mathbb{R} |\ 2 \sin 3x = 1\ ,\ 0 < x < \pi\}$;

3) $A = \{x \in \mathbb{Z} |\ 2^{|x-1|} < 5\}$;

4) $A = \{x \in \mathbb{N} |\ 2 \le \log_2 x \le 3\}$.

1.1.5. Зобразити на координатній площині множини.

1) $A = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 < 4\}$;

2) $A = \{(x, y) |\ x^2 > 2y + 1\}$;

3) $A = \{(x, y) |\ x \ge y^2 - 1;\ x + y < 1\}$;

4) $A = \{(x, y) |\ xy > 1;\ \ y > x^3;\ x > 0\}$.

1.1.6. Розв’язати задані рівняння та нерівності.

1) $|2x + 3| = \frac{1}{2}$;

2) $|x^2 - 4x + 3| = 7$;

3) $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| = 2$;

4) $|x + 1| \le 2$;

5) $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0$;

6) $|x + 1| - |x - 2| < -2$.

1.1.7.

1) Довести методом математичної індукції, що $n7^n - 1$ ділиться на 6 без залишку.

2) Довести методом математичної індукції, що $11^{n+2}+12^{2n+1}$ ділиться на 133 без залишку.

1.1.8. Довести методом математичної індукції рівності.

1) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$;

2) $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

3) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.1.9. Виписати перші шість членів послідовностей, що задано рекурентними співвідношеннями.

1) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ (числа Фібоначчі);

2) $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$;

3) $H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

(многочлени Ерміта);

4) $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$

(многочлени Лежандра).

Відповіді.

Тема 1.2. Поняття функції. Способи задання функції. Основні характеристики функцій. Обернена функція. Складена функція. Основні елементарні функції та їхні графіки.

Нехай задано дві множини дійсних чисел A та B. Якщо кожному елементу x із множини A ставиться за деяким правилом у відповідність єдиний елемент y із множини B, то це правило називають функцією і позначають $y = f(x)$.

У цьому випадку множину A називають областю визначення функції: $D(f) = x \in A$. Множину B називають областю значень функції: $E(f) = y \in B$.

Способи задання функцій

Основні способи задання функції: аналітичний (за допомогою формули), графічний (за допомогою графіка функції) і табличний (за допомогою таблиці відповідностей між незалежною змінної x та залежною змінною y).

Симетрія графіка функції (парність, непарність)

Функція називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції має симетрію відносно осі *ОУ*.

Функція називається непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції має симетрію відносно початку координат.

Періодичність

Функція називається періодичною, якщо існує таке число T , що $f(x+T) = f(x)$, при цьому число T називають періодом функції.

Нулі функції (точки перетину з осями координат)

Перетин з віссю *ОУ*: $\big(0, f(0)\big)$.

Перетин з віссю *ОХ*: $f(x) = 0$.

Проміжки знакосталості функції

Проміжки знакосталості функції це проміжки, на яких функція зберігає свій знак:

$$f(x) > 0 \text{ та } f(x) < 0.$$

Обернена функція

Якщо x таке значення, що задовольняє рівнянню

$$y = f(x),$$

де y – фіксоване число, що належить множині значень $E(f)$, то це співвідношення визначає на множині $E(f)$ деяку функцію

$$x = f^{-1}(y),$$

яку називають оберненою до функції $f(x)$.

Складена функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = u(x)$ на множині B, причому кожному значенню $x \in B$ відповідає значення $u = u(x) \in A$. Тоді на множині B визначена складена функція змінної x:

$$y = f(u(x)).$$

Перелік основних елементарних функцій, їхні властивості та графіки можна знайти у додатку **Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки**.

Неявно задані функції

Якщо функцію задано рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявною функцією розуміють таку, що задається рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

яке не розв'язується відносно залежної змінної.

Зауважимо, що назви «неявна функція» та «явна функція» характеризують не природу функції, а спосіб задання.

Параметрично задані функції

У випадках, коли функціональну залежність між y та x не можна записати у вигляді рівняння $y = y(x)$ (або навпаки $x = x(y)$), або це рівняння дуже складного вигляду і не зручне для користування, доречніше для задання функціональної залежності між y та x використати допоміжну третю змінну t і визначити обидві змінні x та y як функції від параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де t належить деякому відрізку $[T_1, T_2]$.

Змінна t називається параметром, а рівняння $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ називається параметричним рівнянням деякої кривої. Кожному значенню t відповідає деяка точка $(x, y) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ на цій кривій.

1.2.1. Виписати функціональні залежності за умовами задач.

1) Виразити залежність довжини b одного з катетів прямокутного трикутника від довжини a іншого катета при сталій гіпотенузі $c = 7$.

2) У кулю з радіусом $R = 5$ вписано прямий круговий конус. Виписати залежність площі S бічної поверхні конуса від його твірної l. Вказати область визначення функції.

3) Тіло рухається із сталим прискоренням a, починаючи з моменту часу t_0. Виписати залежність швидкості v та пройденого шляху s від часу руху.

4) На відрізку $0 \le x \le 1$ осі Ox рівномірно розподілено масу, яка дорівнює 2, а в точках $x = 2$ і $x = 3$ зосереджено маси по 1 в кожній. Знайти аналітичний вираз функції $m = m(x)$, яка чисельно дорівнює масі, що міститься в інтервалі $-\infty < x < +\infty$.

1.2.2.

1) Задано функцію $y = \frac{x+2}{3x-6}$. Обчислити $y(1)$, $y(-3)$, $y(2)$.

2) Задано функції

а) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, б) $g(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

Обчислити $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) Задано функцію $y = t^2 + 4$. Обчислити $y(1)$, $y(a)$, $y(a+1), 3y(2a)$, $y^2(a-1)$.

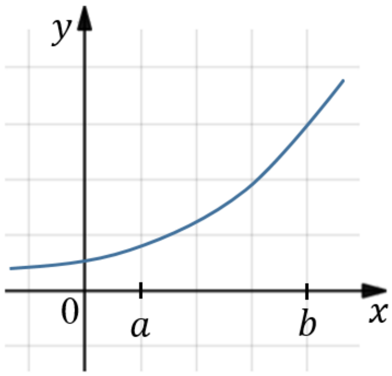
4) Задано функції $y = x^3 - x$ та $z = 2x + 1$. Обчислити $y(z(1))$, $y(z(a))$, $z^2(t)y(t)$.

5) $y = 3x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + 2x$. Довести, що $y(x) = y\left(\frac{1}{x}\right)$.

6) $F(x) = x^4 - 3x^2 + 7$. Довести, що $F(a) = F(-a)$.

7) $\Phi(z) = z^3 - 2z + 1$. Довести, що $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

8) Задано графік функції $y = f(x)$ і значення a і b незалежної змінної x.



а) Побудувати на кресленні $f(a)$ і $f(b)$.

б) З'ясувати геометричний зміст відношення $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1.2.3. Знайти область визначення заданих функцій.

1) $y = \frac{3x+5}{x^2+2x-3}$;

2) $y = \sqrt[4]{9-x^2}$;

3) $y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

4) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

6) $y = e^{\sqrt{x+1}}$;

7) $y = \arcsin\frac{5x+3}{4}$;

8) $y = \arccos\frac{1-2x}{3}$;

9) $y = \ln(5x - x^2 - 6)$;

10) $y = \log_2 \sin x$;

11) $y = \arccos\sqrt{3x}$;

12) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

13) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$;

14) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \ln(4-x)$;

15) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.

1.2.4. Визначити, які із заданих функцій є парними, непарними, загального вигляду.

1) $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6$;

2) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{10} + \frac{x^5}{110}$;

3) $f(x) = \sin 5x$;

4) $f(x) = \sqrt{\cos x}$;

5) $f(x) = \sin x + 3\cos 2x$;

6) $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x + \sin 2x$;

7) $f(x) = a^{-x^2}$;

8) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x}$;

9) $f(x) = \cos 2x + \mathrm{tg}\frac{x}{2} + \sin x$;

10) $f(x) = \frac{x-\mathrm{tg}\,x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

11) $f(x) = x\sin x - |x|$;

12) $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+2x}$; 13)* $\log_a\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1.2.5. Серед запропонованих функцій знайти періодичні та обчислити їхній найменший період.

1) $y=6\cos 9x$; 2) $y=7$;

3) $y=\sin 4x$; 4) $y=\frac{1}{2}\sin^2 2x$;

5) $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; 6) $y=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

7) $y=x^2\cos x$.

1.2.6. З рівнянь, які параметрично задають функцію, виключити параметр та записати функцію $y=y(x)$ у явному вигляді.

1) $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=6t-9t^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\frac{z+1}{z}, \\ y=\frac{z^3+1}{z^2-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=2-\sin\varphi, \\ y=\varphi+\cos\sqrt{\varphi}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin 2t+2\cos^2 t. \end{cases}$

1.2.7. Перевірити, чи лежать точки $(-1,-3)$, $(2,-4)$ та $(3,-2)$, які задано декартовими координатами, на лінії

$$\begin{cases} x=2+3\cos t, \\ y=-3+\sin t. \end{cases}$$

1.2.8. Знайти значення параметра, яке відповідає заданим координатам точки на лінії:

1) $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(\sin t-\sin 2t), \end{cases}$ $(-9,\ 0)$;

2) $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=t^3+t, \end{cases}$ $(3,\ 2)$;

3) $\begin{cases} x=2\operatorname{tg} t, \\ y=2\sin^2 t+\sin 2t, \end{cases}$ $(2,\ 2)$.

1.2.9. Виразити y як функцію x.

1) $y=z^2+3z-1,\ \ z=2x+1$;

2) $y=\sqrt{v^2-1},\ \ v=\frac{1}{\cos x}$;

3) $y=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \ t=\sin z,\ \ z=2x$;

4) $v = \log_3(\operatorname{arctg} x)$, $u = 3^v$, $y = \operatorname{tg} u$;

5) $u = x + 1$, $v = \sin u$, $y = \sqrt{1 - v^2}$;

6) $v = 5^x$, $z = \arcsin(v + 1)$, $y = \sin z$.

1.2.10. Задані складені функції представити у вигляді ланцюга з елементарних функцій.

1) $y = \cos^5 x$; 2) $y = \sqrt[3]{(1 + x^6)^2}$;

3) $y = \ln \sin 2x$; 4) $y = e^{(2x+4)^2}$;

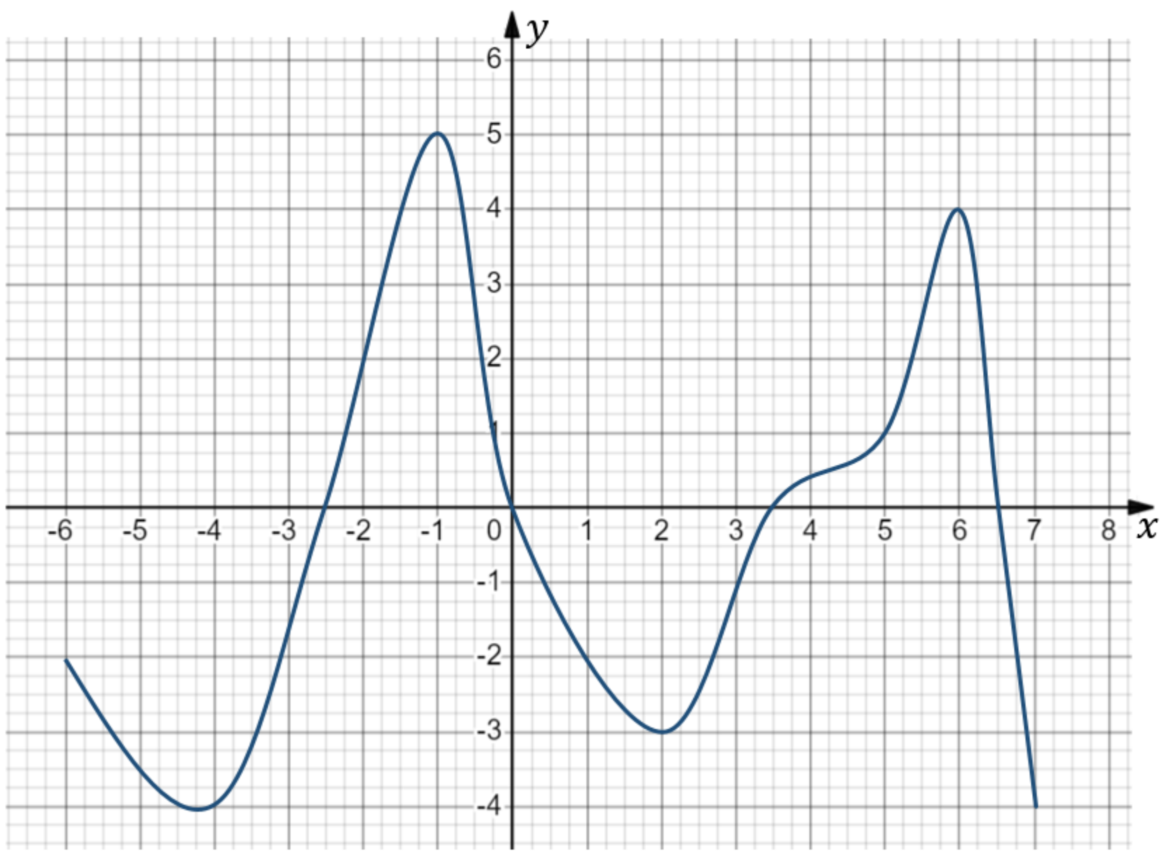
5) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} \ln(x^2 + 1)}$; 6) $y = \sin^2\left(\sqrt[3]{e^{2x} + 1}\right)$.

1.2.11. Записати в явному вигляді функції $y = y(x)$, які задано неявними рівняннями.

1) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; 2) $2^{x(y-5)} = x$;

3) $\ln(x + 3) + \ln(y + 3) = 2x$; 4) $(1 + 2x)\sin y^3 - 5x^2 = 0$.

1.2.12. Функцію $y = f(x)$ задано графічно:



Знайти

1) область визначення;

2) область значень;

3) точки перетину з осями координат;

4) розв'язки рівняння $f(x) = 3$;

5) проміжки, де функція набуває від'ємних значень;

6) проміжки, де функція набуває додатних значень;

7) розв'язок нерівності $0 < f(x) \leq 1$;

8) проміжки, де функція зростає;

9) проміжки, де функція спадає;

10) найбільше та найменше значення функції.

1.2.13. Знайти проміжки знакосталості функцій.

1) $y = x^3 + 2x^2 - 3x$;   2) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

1.2.14. Побудувати графіки функцій.

1) $y = x^2 - 3x + 2$;   2) $y = \frac{2x+1}{x-1}$;

3) $y = 2\sqrt{x+1} + 1$;   4) $y = e^{x+2} - 2$;

5) $y = 1 - \ln(x-1)$;   6) $y = |x+2| + |x|$;

7) $y = 1 + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;   8) $y = \cos 2x - 2$;

9) $y = |1 + \operatorname{tg} x|$.

Відповіді.

Тема 1.3. Числова послідовність. Основні поняття. Способи задання. Границя числової послідовності. Граничний перехід у нерівностях. Границя монотонної обмеженої послідовності. Число *е*. Натуральні логарифми.

Числова послідовність - це набір дійсних чисел, члени якого занумеровані всіма натуральними числами, розташовані у порядку зростання номерів та обчислюються за певним законом (часто залежним від номера) і позначається $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Послідовність $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ називається ***збіжною*** до числа a, якщо для кожного достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N (що залежить від ε) таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

При цьому число a називається ***границею числової послідовності*** $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ і позначається

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ якщо } \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність має *скінченну* границю (a - дійсне число), то послідовність називається збіжною (послідовність збігається до a), інакше послідовність розбіжна (послідовність розбігається).

Теорема.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, Тоді

1) $\forall C \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} Ca_n = Ca$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$.

Теорема. **(Принцип збіжності) – Ознака Вейєрштрасса**

Якщо послідовність $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ монотонна та обмежена, то $\exists a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Невизначені форми (Невизначеності)

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0.$$

Число *e*

Послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284\ldots$$

1.3.1. Виписати перші п’ять членів послідовності, заданої своїм загальним членом.

1) $\left\{\frac{n+3}{2n},\ n>0\right\}$; 2) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n!},\ n\ge 0\right\}$;

3) $\{\cos(3n-2)\pi,\ n\ge 0\}$; 4) $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{4n+1},\ n\ge 0\right\}$;

5) $\{2n+(-1)^{n-1},\ n>0\}$; 6) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n>0\right\}$.

1.3.2. Виписати загальний член послідовності.

1) $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ldots$; 2) $-1,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ldots$;

3) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{24}{5},\ \frac{120}{6},\ldots$; 4) $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{9}{27},\ \frac{16}{81},\ldots$;

5) $\frac{3}{2},-\frac{5}{4},\ \frac{7}{6},-\frac{9}{8},\ \frac{11}{10},\ldots$; 6) $\frac{2}{3\cdot 1},\ \frac{3}{4\cdot 2},\ \frac{4}{5\cdot 3},\ \frac{5}{6\cdot 4},\ \frac{6}{7\cdot 5},\ldots$.

1.3.3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ та визначити номер $N(\varepsilon)>0$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ для всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо

1) $\left\{a_n=\frac{n+1}{n},\ n>0\right\}$;

2) $\left\{a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ n>0\right\}$;

3) $\left\{a_n=2+\frac{1}{2^n},\ n>0\right\}$.

У кожному прикладі знайти $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon=0{,}1$ та $\varepsilon=0{,}01$.

1.3.4. Довести за означенням, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n-1} = 2;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{1-n^2} = 0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 0.$

1.3.5. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n-1)^2};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100n^3+2n^2}{0{,}01n^4-10n^3+2};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-2}{5n^2-n+4};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+1}{n^3-n^2+n+1};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^2+7n}{2n^3-6n+5};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+6n+1}{n^3+5n^2-1};$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-n^5+n}{3n^4+7n^3+n+1};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+6}{4n^5-n^6+4n};$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+5n+1}{n^7+8};$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n};$

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^{30}+3n^{15}-8n+10}{n^7+8n^{15}-3n^{30}}.$

1.3.6. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-(n+2)^2}{(n-1)^2-(2n-1)^2};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n^2-3)}{(n+2)^3-(n-1)^3};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^3-(n-2)^3};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4+(n-1)^4}{(n+1)^4-(n-1)^4};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4+(n-1)^4}{(2n+1)^4-(n-1)^4};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(2n+1)^4}{(n+1)^3-(n+2)^3};$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-n^4}{(2n-1)^4-n^4};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^4-(n-1)^4}{n^3-(2n+1)^3};$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+5)^5(n^2+5n+4)^3}{(n+1)^{10}(6n+9)};$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+15)^{13}-(n^2+n-3)^6}{(3n+10)^{11}+6n+9};$

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-5n+1}{n-2} - \frac{n^2+n-4}{n-1}.$

1.3.7. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3-2n+1}}{n+3};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^2+6n-3}}{n-1};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+6n-3}}{\sqrt[4]{n^5+1}};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+\sqrt{n^2+1})^2}{\sqrt[3]{n-n^6}};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt[3]{n^5+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[5]{n-1}}{\sqrt[5]{n^2+3}-\sqrt[4]{n^2+4n}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4-1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5-3}-\sqrt[5]{n^7+5n^3+1}}$.

1.3.8. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+2)!-n!}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+1)!}{(n+1)!-2\cdot n!}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n-2)!}{(n+3)!+(n-3)!}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!+(n+2)!+\cdots+(2n)!}{1!+2!+3!+\cdots+n!}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

1.3.9. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n-1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^{\frac{1}{n}}}{1+2^{\frac{1}{n}}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{3^n+4^n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4\cdot 7^n}{2\cdot 7^n-4^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+\cdot 2^{n-1}}{3^n+5^n}$.

1.3.10. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+4}}$.

1.3.11. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n-2})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+4}-n)n^2$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

1.3.12. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{3n+6}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n+4}\right)^{2n-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n-3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n^2+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{6n-1}\right)^{n^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2n}{n^2+2}\right)^{n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^2}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)^{n}$.

1.3.13. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin n!}{n^2+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+\cos\frac{\pi n}{4}}{3^n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\cos n^3-\frac{3n}{6n+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^5\frac{\pi}{2}n}{\sqrt{n^2+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n}$.

Відповіді.

Тема 1.4. Границя функції. Односторонні границі. Нескінченно великі функції. Нескінченно малі функції та їхні властивості. Основні теореми про границі.

Границя функції

Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** $x = x_0$ і позначається

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке залежить від ε і x_0), що для всіх x, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

У найпростіших випадках обчислення границі зводиться до підстановки в функцію граничного значення аргументу. Часто підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначених виразів вигляду

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0 .$$

Обчислення границі функції в цих випадках називають розкриттям невизначеності.

Односторонні границі

Односторонні границі розглядають поведінку функції $f(x)$, коли x наближається до x_0 з правого або з лівого боку.

Границею справа (правосторонньою границею) функції $f(x)$ у разі прямування x до x_0, є число $a \in R$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,$$

якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \neq x_0,\ x \in (x_0, x_0 + \delta):\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Границею зліва (лівосторонньою границею) функції $f(x)$, у разі прямування x до x_0, є число $a \in R$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a,$$

якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \neq x_0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0):\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Нескінченно великі функції. Нескінченно малі функції

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно великою*** у разі $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$.

Функція $\beta(x)$ називається ***нескінченно малою*** у разі $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Теорема.

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тоді

1) $\forall C \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = Ca$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a + b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = ab$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

1.4.1. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, тобто для заданого числа $\varepsilon > 0$ підібрати таке число $\delta > 0$, щоб виконання нерівності $|x - 2| < \delta$ забезпечувало виконання нерівності $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Обчислити δ, якщо: $\varepsilon = 0{,}1$ та $\varepsilon = 0{,}01$.

1.4.2. Довести за означенням.

1) $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1) = 3$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x) = 3$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 2}{2x} = \frac{1}{2}$.

1.4.3. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{5x + 1}$;

2) $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 + 3\sin 2y}{1 - \cos 4y}$;

3) $\lim\limits_{z \to \frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos z$;

4) $\lim\limits_{t \to 1} \frac{5}{\sin^2(t - 1)}$;

5) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{-2}{\sqrt{\mathrm{tg} 3z}}$;

6) $\lim\limits_{y \to 2} \left(\frac{8}{y^2}\right)^{\frac{4}{y^2}}$;

7) $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{5}{2^{a+2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$;

9) $\lim\limits_{t\to-1}\frac{1}{\mathrm{ctg}^2(t+1)}$.

1.4.4. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to1-0}2^{\frac{1}{x-1}}$ та $\lim\limits_{x\to1+0}2^{\frac{1}{x-1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{tg}2x}$ та $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{tg}2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x}$ та $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{1+e^x}$.

1.4.5. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$; 2) $\lim\limits_{t\to-3}\frac{t^2+4t+3}{t^3-9t}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; 8) $\lim\limits_{y\to1}\frac{y^3-y^2+y-1}{y^3+5y^2-13y+7}$;

9) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+10x}$; 10) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$;

11) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+x^3+2x+2}{x^2-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$.

1.4.6. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x}{x^4-2x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+4x}{x^2-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x^3}{1+x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+3}{x^2-5x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+4x-9}{4x^3+6x^2-x+1}$; 6) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{6z^2-5z+1}{2z^2+z-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^3-6x^2+3x}{x^5+x^2-3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+2x^3+5x^2}{x^2+5x}$;

9) $\lim\limits_{t\to0+}\frac{2t^3+2t}{t^4-8t^2}$.

1.4.7. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x(x^2+4x+4)}-\frac{1}{x^3+3x+2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;

5) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{6y^4}{3y^3+1}-2y\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^3}{4x^2-3}-\frac{2x^2}{4x+3}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4x^2}{2x-1}-\frac{(2x+1)(3x^2+6x+1)}{3x^2}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\dots+(x+100)^{10}}{x^{10}-100^{10}}$.

1.4.8. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$;

2) $\lim\limits_{y\to 8}\frac{y-8}{\sqrt[3]{y}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

6) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

7) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^2-\sqrt{z}}{\sqrt{z}-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x\sqrt{x^2+1}-1}$;

11)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

1.4.9. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

4) $\lim\limits_{t\to +\infty}\left(\sqrt{t(t+2)}-t\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt[4]{1+x^4}-\sqrt[5]{1+x^4}}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+5}-\sqrt[4]{2x^3-3}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2}-\sqrt[5]{x^3+3}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

Відповіді.

Тема 1.5. Перша важлива границя та границі, що з неї випливають. Друга важлива границя. Границі, що з неї випливають.

Перша важлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}=1.$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e=2{,}7182818284\ldots\ .$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m.$$

1.5.1. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$; 2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{\sin 6t}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg}2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\operatorname{arctg} x}{2x-\arcsin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x-\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 7x}$;

7) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z^{2}}{z\operatorname{arctg} 5z}$; 8) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}^{2} y}{\sin 3y^{2}+\arcsin y}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{5x-\sqrt{\sin 2x^{2}}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{2x^{2}}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{3\operatorname{arctg}2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(e-2x)-1}$.

1.5.2. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{5x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 4x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,\mathrm{tg}\,3x}$; 4) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos^3 2z}{z\sin 3z}$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

9) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos t}}{\arcsin t^2}$; 10) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(\alpha+y)-\sin\alpha}{y}$;

11) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2z}{\sqrt[3]{(1-\cos 3z)^2}}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x+\mathrm{tg}^4\sqrt{x}}{3x^2-\mathrm{arctg}\,5x}$.

1.5.3. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\mathrm{tg}\,4\pi t}{\sin 8\pi t}$;

3) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin y}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{\mathrm{arctg}(x+2)}$; 6) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt[3]{(1-\sin y)^2}}$;

7) $\lim\limits_{y\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$; 8) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{\mathrm{tg}^2\,\pi z}{1+\cos\pi z}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\,\pi x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1+\cos 2\pi x}{\mathrm{tg}^2 2\pi x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{\sin\pi x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$; 14) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x}$.

1.5.4. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\mathrm{tg}\,z$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}\,2x\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{5\pi}{x}$; 4) $\lim\limits_{y\to\infty}(4-y)\,\mathrm{tg}\frac{2}{3y}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{\pi}{x}-1\right)$; 6) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,2z\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-z\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x+\cos x}$.

1.5.5. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;   2) $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\left(2y\operatorname{tg} y-\frac{\pi}{\cos y}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$;   4) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{10}{\sin^2 3t}\right)$.

1.5.6. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$;   4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x+3}{2}}$;   6) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t+5}\right)^{t^3+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2-2}\right)^{-x^2}$;   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{\sqrt{x}+3}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x+1}\right)^{x-1}$;   10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{x}$;   12) $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\left(\frac{2z+5}{6z-4}\right)^{z+3}$;

13) $\lim\limits_{y\to\infty} y(\ln(y-1)-\ln(y+3))$;   14) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\ln(x+7)-\ln x)$.

1.5.7. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2}{\operatorname{tg} 3x}}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}$;

3) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\operatorname{tg}^2\sqrt{t}\right)^{\frac{\sqrt{t}+1}{\arcsin 5t}}$;   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}$;   6) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{bx}$;   8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$;   12) $\lim\limits_{y\to 1}(3y^2-2y)^{\frac{1}{y-1}}$;

13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2\, 2x}$;   14) $\lim\limits_{z\to 2}\left(\frac{\sin z}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{z-2}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\, x\sin 2x}}$;   16) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}\, x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$;   18) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(4-x)}}$;

19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg} x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$;   20) $\lim\limits_{x\to 1}(3e^{x-1}-2)^{\frac{x}{x-1}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Відповіді.

Тема 1.6. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функцій та основні теореми про них. Застосування еквівалентних нескінченно малих функцій до обчислення границь.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ дві нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***вищого порядку*** у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha = o(\beta)$.
2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***нижчого порядку*** у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\beta = o(\alpha)$.
3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c,\ c \neq 0,\ c \neq 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими ***одного порядку*** малості коли $x \to x_0$.
4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ ***еквівалентні*** коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha \sim \beta$.
5. Якщо $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k} = A \neq 0\ (A \epsilon \mathbb{R})$, то функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою ***k-го порядку*** малості відносно $\beta(x)$ коли $x \to x_0$ і позначається $\alpha(x) = o\left(\beta^k(x)\right)$. Число k у цьому разі називається ***порядком малості***.
6. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називається ***непорівнянними*** нескінченно малими.

Таблиця еквівалентностей

$z(x) \to 0, \quad x \to x_0$

$\sin z(x) \sim z(x)$	$\arcsin z(x) \sim z(x)$	$e^{z(x)} - 1 \sim z(x)$
$\mathrm{tg}\, z(x) \sim z(x)$	$\mathrm{arctg}\, z(x) \sim z(x)$	$a^{z(x)} - 1 \sim z(x) \ln a$
$\ln(1 + z(x)) \sim z(x)$	$\log_a(1 + z(x)) \sim \frac{z(x)}{\ln a}$	$(1 + z(x))^m - 1 \sim m z(x)$

1.6.1. Довести, що функція $f(x)$ є нескінченно малою, коли $x \to x_0$.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4} - 2,\ x_0 = 3;$

2) $f(x) = \frac{e^{x+1}-1}{2x+3},\ x_0 = -1;$

3) $f(x) = (x + \cos x) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{12};$

4) $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2-2}\right)^{x^2+1},\ x_0 = 0.$

1.6.2. Довести, що нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1,\ \beta(x) = \frac{x}{2},\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = e^{2x} - 1,\ \beta(x) = 2x - \sin x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = e^{3x} - e^x,\ \beta(x) = \sin 3x - \sin x, x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x \sin x}),\ \beta(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = e^x - \cos x,\ \beta(x) = \mathrm{arctg} x,\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x},\ \beta(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = \frac{x-1}{3-x},\ \beta(x) = \frac{x^2-1}{x+3}, x_0 = 1;$

8) $\alpha(x) = \ln(x+3),\ \beta(x) = \mathrm{tg}(x+2),\ x_0 = -2\ .$

1.6.3. Довести, що функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з $\beta(x)$ коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \frac{2x^4-x^3}{x+5},\ \beta(x) = x^2,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \sin^2 x,\ \beta(x) = \mathrm{tg}\, 3x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = \mathrm{tg}^3 x,\ \beta(x) = 1 - \cos 2x,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \mathrm{arctg}^2 2x,\ \beta(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right),\ \beta(x) = \arcsin\sqrt{x},\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right),\ \beta(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1,\ x_0 = 0;$

7) $\alpha(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3,\ \beta(x) = x^2 - 1,\ x_0 = 1;$

8) $\alpha(x) = (x-5)^2,\ \beta(x) = \sqrt{x-1} - 2,\ x_0 = 5.$

1.6.4. Довести, що нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ одного порядку малості, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = x^3 + 100x^2,\ \beta(x) = x^2,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x\,,\ \beta(x) = x^3,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = \sqrt{1 + 2x^2} - 1,\ \beta(x) = \sin^2 x\,,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \ln(1 + 3x)\,,\ \beta(x) = \sqrt[3]{\arcsin x^3}\,,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = 1 - \sqrt[3]{x},\ \beta(x) = 1 - x,\ x_0 = 1;$

6) $\alpha(x) = \sqrt[3]{e^x - e},\ \beta(x) = 5\sqrt[3]{x} - 5, x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = 1 + \cos x\,,\ \beta(x) = \operatorname{tg} x^2\,, x_0 = \pi;$

8) $\alpha(x) = \sqrt{e^{2\operatorname{tg} x} - 1},\ \beta(x) = e^{\sqrt{3x}} - 1,\ x_0 = 0.$

1.6.5. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$.

1) $\alpha(x) = \operatorname{tg} 3x\,,\ \beta(x) = \arcsin 2x\,,\ x_0 = 0;$

2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1,\ \beta(x) = x,\ x_0 = 0;$

3) $\alpha(x) = e^{x^2} - \cos x\,,\ \beta(x) = x,\ x_0 = 0;$

4) $\alpha(x) = \sqrt{\sin^2 x + x^4},\ \beta(x) = 1 - \cos x\,,\ x_0 = 0;$

5) $\alpha(x) = \ln(1 + x\sqrt{\sin x})\,,\ \beta(x) = \sqrt{x^5} + \sqrt{x^3},\ x_0 = 0;$

6) $\alpha(x) = \sin(x^2 - 2x + 1)\,,\ \beta(x) = (x-1)^2, x_0 = 1;$

7) $\alpha(x) = 2^{x+1} - e^{x+1},\ \beta(x) = \sqrt{x+1},\ x_0 = -1;$

8) $\alpha(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ \beta(x) = x^2, x_0 = 0;$

9) $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x},\ \beta(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = 1.$

1.6.6. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо нескінченно малої $\beta(x)$, коли $x \to 0$.

1) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x},\quad \beta(x) = x;$

2) $\alpha(x) = \frac{7x^{10}}{x^3+1},\quad \beta(x) = x;$

3) $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2,\quad \beta(x) = x;$

4) $\alpha(x) = \operatorname{arctg} 3x\,,\ \beta(x) = \ln(1 + x^3);$

5) $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1,\ \beta(x) = e^{\sin x} - 1.$

1.6.7 Знайти границі за допомогою таблиці еквівалентності нескінченно малих.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{e^{-2x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{\operatorname{tg} x-x^3-5x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 6x}-e^{\sin 4x}}{\arcsin 2x}$;

5) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 2y-\sin y}{\sqrt{1-4y^2}-1}$; 6) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^3 2t)}{\operatorname{tg} t\cdot\sin(t^2-3t^3)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{x^2+\ln(1+3x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+\ln(1+2x^2)+(1+\sin^2 x)^2-2}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^4+x^4}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^3-3x^2+4)}{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}(x-2)}-1}$; 12) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(1-y)^2}-1}{(1+y)^2\sqrt{(1+y)^5}-1}$;

13) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln\cos 2y}{\cos 8y+e^{\sin 3y^2}-2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$;

15) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt{25+6z}-5}{\sqrt[3]{27+4z}-3}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3}-e}$;

17) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}\left(3^{\frac{\pi}{x}}-3\right)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$; 18) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(\ln(3x-5))}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$;

21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}\right)-\sqrt{1+x}}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$.

Відповіді.

Тема 1.7. Означення та властивості неперервної функції. Класифікація розривів функції. Основні теореми про неперервні функції. Неперервність елементарних функцій.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x_0 \in D(f)$ тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Точки розриву функції та їх класифікація

Якщо в деякій точці $x = x_0$ функція $f(x)$ не є неперервною, то така функція називається ***розривною в точці*** x_0, або кажуть, що точка x_0 є ***точкою розриву*** функції $f(x)$.

Класифікація точок розриву

1. Якщо правостороння та лівостороння границі існують, але не рівні між собою

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \in R, \lim_{x\to x_0-0} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ та } a \neq b ,$$

то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду типу стрибок***.

2. Якщо $f(x_0)$ не існує, а правостороння та лівостороння границі існують і рівні

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду типу усувна (точкою усувного розриву)***.

3. Якщо хоча б одна з $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює $\pm\infty$ або не існує, то точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

1.7.1. Функцію задано формулою

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{коли } x \neq 3, \\ A, & \text{коли } x = 3. \end{cases}$$

За якого значення A функція $f(x)$ буде неперервною в точці $x = 3$?

1.7.2. За якого значення числа a функція

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1,\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}$$

буде неперервною?

1.7.3. Функцію задано формулою

$$f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}\ .$$

Яким значенням треба довизначити функцію $f(x)$, щоб вона стала неперервною в точці $x=0$?

1.7.4. Дослідити задані функції $f(x)$ та $g(x)$ на неперервність. Відповісти на питання.

1) Яким значенням треба довизначити функцію $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{(x-2)^2}$, щоб вона стала неперервною в точці $x=2$?

2) Чи можливо довизначити функцію $g(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$, щоб вона стала неперервною в точці $x=2$?

1.7.5. Дослідити на неперервність функції.

1) $y=\frac{x+1}{x^2+x-6}$; 2) $y=\frac{x^3-8}{x-2}$;

3) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3-x}$; 4) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

5) $y=1-2^{\frac{1}{x-1}}$; 6) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$;

7) $y=4^{\frac{1}{x^2-9}}$; 8) $y=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

9) $y=\frac{7^{\frac{1}{x}}-1}{7^{\frac{1}{x}}+1}$; 10) $y=\frac{2}{1-3^{3+x}}$;

11) $y=\frac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$; 12) $y=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$;

13) $y=\frac{x}{\sin x}$; 14) $y=\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$;

15) $y=\frac{2}{\lg|2x-3|}-1$; 16) $y=\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;

17) $y=\frac{|2x+3|}{2x+3}$; 18) $y=\frac{|x|-x}{x^2}$.

1.7.6. Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки.

1) $y=\begin{cases}3x^2, & x\le -1,\\ x+2, & x>1;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}4-x^2, & x<2,\\ -1, & x\ge 2;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\le -1,\\ 2, & -1<x\le 2,\\ -2x+6, & 2<x<+\infty;\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}1-x^2, & -\infty<x<0,\\ \frac{6}{x}, & 0<x\le 3,\\ x-2, & 3<x<+\infty;\end{cases}$

5) $y=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x<-\frac{\pi}{2},\\ \left(\frac{x}{\pi}\right)^3, & -\frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ -\cos x, & \pi<x<+\infty;\end{cases}$

6) $y=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & -\infty<x<1,\\ \ln(x-1), & 1<x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x<+\infty;\end{cases}$

7) $y=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ -x^2+4x-2, & 1\le x<3,\\ 4-x, & 3\le x<+\infty.\end{cases}$

Відповіді.

Тема 1.8. Означення та властивості функцій, неперервних на відрізку. Теореми Вейєрштрасса та Больцано-Коші. Наслідки з теорем.

Теорема 1. (Перша теорема Вейєрштрасса)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \le x \le b$, то вона обмежена на відрізку $[a, b]$.

Теорема 2. (Друга теорема Вейєрштрасса)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \le x \le b$, то існує хоча б одна точка x^* така, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x^*) \ge f(x)$ та існує хоча б одна точка x_* така, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x_*) \le f(x)$.

За цих обставин ми називаємо значення $f(x^*)$ найбільшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]\left(\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x^*)\right)$, а значення $f(x_*)$ найменшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ $\left(\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_*)\right)$.

Теорема 3. (Перша теорема Больцано-Коші)

Якщо $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \le x \le b$ і виконується одна з нерівностей $f(a) < 0 < f(b)$ або $f(b) < 0 < f(a)$, тоді існує хоча б одна точка x_0 така, що $f(x_0) = 0$.

Теорема 4. (Друга теорема Больцано-Коші)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, $a \le x \le b$ і $f(a) \ne f(b)$, то для довільного числа C такого, що $f(a) \le C \le f(b)$, існує точка $x = c, a < c < b$ така, що $f(c) = C$.

1.8.1 Довести існування оберненої до $f(x)$ функції в заданій області ($x \in D$). Знайти обернену функцію та вказати її область визначення (у відповідності до області D).

1) $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $x \in [1, +\infty)$;
2) $f(x) = \ln(1 - x)$, $x \in [-1,1)$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

1.8.2 Встановити, чи буде функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$.

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$, $x\in[-5,0]$;
2) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x-4}$, $x\in[0,5]$;
3) $f(x)=x^2\ln(x^2-1)+x$, $x\in[-2,2]$;
4) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}+1$, $x\in[0,1]$.

1.8.3 Довести, що функція $f(x)$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[a,b]$.

1) $f(x)=x^3-2x+1$, $x\in[0,3]$;
2) $f(x)=x\ln(x+1)+2$, $x\in[0,5]$;
3) $f(x)=\sin x^2+\cos^2 x$, $x\in[0,\ \pi]$.

1.8.4 Показати, що функція $f(x)$ набуває нульового значення хоча б в одній точці на відрізку $[a,b]$.

1) $f(x)=2^x-4x$, $x\in[0,1]$;
2) $f(x)=x^4-x-1$, $x\in[-1,0]$;
3) $f(x)=x^2\ln x-x$, $x\in[1,2]$.

1.8.5 Показати, що рівняння має хоча б один корінь, що належить відрізку $[a,b]$.

1) $x^5-3x=1$, $x\in[0,3]$;
2) $x2^x=1$, $x\in[-2,2]$;
3) $x=\frac{1}{2}\sin x+3$, $x\in[-1,4]$.

Встановити відрізок $[n,n+1]\subset[a,b]$, де n – ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.

1.8.6 Показати, що існує розв'язок рівняння $f(x)=C$, що належить відрізку $[a,b]$. Встановити кількість коренів та відрізки вигляду $[n,n+1]\subset[a,b]$, де n – ціле число, до яких належать ці корені.

1) $f(x)=x^2e^x+2$, $C=\frac{5}{2}$, $x\in[-4,-1]$;
2) $f(x)=x^2+\cos 2x$, $C=-1$, $x\in[0,2]$;
3) $f(x)=x-\ln(x^2-1)$, $C=2$, $x\in[-2,6]$.

Відповіді.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

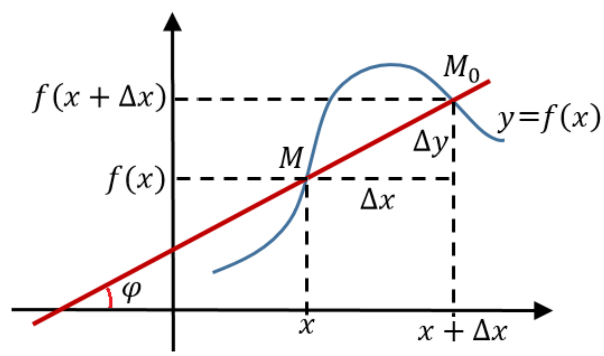
Тема 2.1. Задачі, які приводять до поняття похідної. Означення похідної. Механічний, фізичний і геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до кривої. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції. Основні правила диференціювання: похідна суми, добутку та частки функцій. Похідна складеної функції.

Середньою швидкістю зміни функції $y = f(x)$ на інтервалі $[x, x+\Delta x]$ називається відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пряма лінія, яка проходить через дві точки M і M_0 на графіку функції $y = f(x)$, називається ***січною***. Положення січної лінії визначається $\operatorname{tg}\varphi$ - кутовим коефіцієнтом нахилу прямої:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Миттєву швидкість зміни функції $y = f(x)$ називають похідною функції і позначають

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції в точці $x = x_0$ задається наступним чином:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2.1.1. Знайти приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо задано приріст аргументу Δx.

1) $y = x^2, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1;$

2) $y = \ln(x+1), \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}4;$

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $\quad x_0 = -2$, $\quad \Delta x = 0{,}1$;

4) $y = \sin 2x$, $\quad x_0 = a$, $\quad \Delta x = \frac{\pi}{4}$.

2.1.2. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо задано приріст аргументу Δx.

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$, $\quad x_0 = 1$, $\quad \Delta x = 0{,}1$;

2) $y = \sqrt[3]{2x-1}$, $\quad x_0 = 1$, $\quad \Delta x = 0{,}4$;

3) $y = 2^x$, $\quad x_0 = -1$, $\quad \Delta x = 0{,}5$;

4) $y = \cos x$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{2}$, $\quad \Delta x = \frac{\pi}{6}$.

2.1.3. Знайти приріст Δy в точці $x = x_0$, як функцію Δx ($\Delta y(x_0, \Delta x)$).

1) $y = 2x^2 + 5$, $\quad x_0 = 1$; $\qquad$ 2) $y = \sqrt{x+1}$, $\quad x_0 = 0$;

3) $y = \log_2 x$, $\quad x_0 = 1$; $\qquad$ 4) $y = \operatorname{tg} x$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Знайти границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \to 0$.

2.1.4. Знайти похідну функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, користуючись означенням.

1) $y = x^3$, $\quad x_0 = 2$; $\qquad$ 2) $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad x_0 = 1$;

3) $y = e^{2x}$, $\quad x_0 = 0$; $\qquad$ 4) $y = \cos x$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2.1.5. Знайти кутовий коефіцієнт січної до кривої $y = f(x)$, якщо абсциси точок перетину дорівнюють x_1 і x_2.

1) $y = \frac{1}{x}$, $\quad x_1 = 3$, $\ x_2 = 5$;

2) $y = \sqrt{2x+1}$, $\quad x_1 = 4$, $\ x_2 = 7{,}5$;

3) $y = \operatorname{tg} x$, $\quad x_1 = \frac{\pi}{6}$, $\ x_2 = \frac{\pi}{3}$;

4) $y = x^2 + 2x$, $\quad x_1 = 0$, $\ x_2 = 0{,}5$.

2.1.6. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^3 + 3t^2 + 2$, де шлях подано в сантиметрах, а час – у хвилинах. Знайти середню швидкість руху:

1) за перші 2 хвилини;

2) за проміжок часу від $t = 2$ хв. до $t = 3$ хв.

2.1.7. Спортсмен пробігає стометрівку так, що відстань S після t секунд дорівнює $S(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t$. Знайти середню швидкість спортсмена:

1) за перші 4 секунди;

2) на фініші.

2.1.8. З повітряної кулі, що знаходиться на висоті 160 метрів над землею, скинули мішок з піском. Після t секунд мішок буде знаходитися на висоті $160 - 16t^2$ метрів над землею.

1) Знайти формулу для обчислення середньої швидкості на проміжку часу від $t = a$ сек. до $t = b$ сек.

2) Користуючись формулою, обчислити середню швидкість протягом усього часу падіння.

3) Користуючись означенням похідної, знайти формулу для обчислення швидкості у будь-який момент часу.

2.1.9. Тонкий неоднорідний стержень AB має довжину $L = 20$ см. Маса відрізка AM зростає пропорційно квадрату відстані точки M від точки A, причому відомо, що маса відрізка $AM = 2$ см дорівнює 8 гр. Знайти:

1) середню лінійну густину відрізка $AB = 2$ см;

2) середню лінійну густину усього відрізка AB;

3) густину стержня в точці M.

2.1.10. За законом Бойля-Маріотта маємо, що при постійній температурі й масі газу добуток тиску газу на його об'єм постійний, тобто тиск та об'єм газу зв'язані співвідношенням $P = \frac{C}{V}$, де $C -$ деяка константа. Якщо, для певного газу, $C = 200$ і V збільшується, знайти, користуючись означенням похідної, швидкість зміни тиску P від об'єму V.

2.1.11. Користуючись означенням похідної, знайти швидкість зміни площі поверхні S кулі під час надування, в залежності від радіуса R. Знайти значення швидкості для $R = 2$ см.

Відповіді.

Тема 2.2. Похідні основних елементарних функцій: степенева функція, показникова функція, логарифмічна функція, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції. Гіперболічні функції та їхні похідні. Таблиця похідних.

Основні правила обчислення похідних

Нехай нам задано дві функції $u(x)$, $v(x)$, тоді

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x), \quad \text{де} \quad c - const$$

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Таблиця похідних

$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$	$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$	$\boldsymbol{y(x)}$	$\boldsymbol{y'(x)}$
c	0	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$\lg x$	$\frac{1}{x\ln 10}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, де функції f та u мають похідні, тоді

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

2.2.1. Знайти похідні.

1) $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$;

2) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$;

3) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{5}$;

4) $y = 0{,}4\sqrt[4]{x} - \frac{x^3}{0{,}3} + \frac{0{,}1}{x^2}$;

5) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;

6) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$;

7) $y = \left(\sqrt[3]{x} + 6\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 3x\right)$;

8) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

9) $s = \frac{3t^2+1}{t-1}$;

10) $y = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x+4}}$;

11) $y = \frac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$, знайти $y'\left(\frac{1}{4}\right)$;

12) $s(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}$, знайти $s'(0)$ та $s'(2)$;

13) $F(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$, знайти $F'(0)$, $F'(1)$ та $F'(2)$.

2.2.2. Знайти похідні.

1) $y = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$;

2) $y = 2x + 5\cos^3 x$;

3) $y = \frac{x}{\cos x+\sin x}$;

4) $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$;

5) $y = \frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$;

6) $y = \sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}$;

7) $y = \sin^2(\cos 3x)$;

8) $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{1 + x^2}$;

9) $y = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$;

10) $y = \operatorname{tg} t - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 t$;

11) $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\frac{6}{x}$;

12) $y = \frac{x^2 - \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$.

2.2.3 Знайти похідні.

1) $y = \ln(1 - x^2)$;

2) $y = \log_3(x^2 - 1)$;

3) $y = \log_2 \sin 2x$;

4) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(1 + \sqrt{x})$;

5) $y = \log_2 \log_3(\log_5 x)$;

6) $y = \sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$;

7) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2.2.4. Знайти похідні.

1) $y = \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^5$;

2) $y = \sqrt{xe^x + x}$;

3) $y = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$;

4) $y = \sqrt[3]{2e^x - 3^x + 1} + \ln^6 x$;

5) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

6) $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$;

7) $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}}$.

2.2.5. Знайти похідні.

1) $y = x \arcsin x$;

2) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

3) $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$;

4) $y = \sqrt{1+\arcsin x}$;

5) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

6) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$;

7) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x} - \arccos^3 x$;

8) $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$.

2.2.6. Знайти похідні.

1) $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$;

2) $y = \operatorname{th} x - x$;

3) $y = \frac{3\operatorname{cth}x}{\ln x}$;

4) $y = \operatorname{sh}^3 x$;

5) $y = e^{\operatorname{ch}^2 x} + \sqrt{\operatorname{ch}x}$;

6) $y = \operatorname{th}(\ln x) + \ln\operatorname{ch}(2x)$.

2.2.7. Знайти похідні.

1) $y = e^x \cdot \sin x \cdot \cos^3 x$;

2) $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$;

3) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

4) $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}x \cdot \ln(1+\sin x) - x$;

5) $y = \ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$;

6) $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

7) $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$;

8) $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

2.2.8. Довести, що функція $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє співвідношення

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

2.2.9. Довести, що функція $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ задовольняє співвідношення

$$2y = xy' + \ln y'.$$

2.2.10. Обчислити суму:

1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, x \neq 1;$

2) $2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \cdots + (n-1)nx^{n-2}, x \neq 1.$

Відповіді.

Тема 2.3. Похідна оберненої функції. Похідна неявно заданої функції. Похідна функції, заданої параметрично. Логарифмічне диференціювання. Похідна степенево-показникової функції.

Похідна оберненої функції

Якщо для заданої функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} ,$$

або

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0.$$

Похідна функції, що задана неявно

Нехай функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$. Щоб знайти похідну неявно заданої функції, потрібно продиференціювати за змінною x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Похідна функції, що задана параметрично

Нехай функція задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t −параметр. Тоді похідна обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{{dy}/{dt}}{{dx}/{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Логарифмічне диференціювання

Нехай задана степенево-показникова функція

$$y = [u(x)]^{v(x)},$$

де $u(x)$ та $v(x)$ –диференційовні функції.

Тоді

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Диференціюючи обидві частини даної рівності, отримуємо:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

Звідси для похідної маємо рівність

$$y' = \left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\tfrac{1}{u(x)}u'(x)\right]\cdot y = \left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\tfrac{1}{u(x)}u'(x)\right]\cdot [u(x)]^{v(x)}.$$

2.3.1. Використовуючи похідну оберненої функції розв'язати задачі.

1) $x = e^{\arcsin y}$, знайти $\frac{dy}{dx}$ через y; через x .

2) $s = te^{-t}$, знайти $\frac{dt}{ds}$.

3) $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$, знайти $\frac{dx}{dy}$ через x; через y.

Перевірити справедливість співвідношення

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1.$$

4) Перевірити справедливість співвідношення

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1,$$

якщо x та y зв'язані залежністю

$$y = \ln(x^2 - 1).$$

5) $x = y^3 - 4y + 1$, знайти $\frac{dy}{dx}$.

6) $t = \arcsin 2^s$, знайти s'.

2.3.2. Обчислити похідну $\frac{dy}{dx} = y'_x$ неявно заданих функцій.

1) $x^2 + y^2 - 3axy = 0$, $a = const$;

2) $y = 1 + xe^y$;

3) $\cos xy = x$;

4) $y = \sin(x + y)$;

5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a = const$;

6) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

7) $y = x + \mathrm{arctg} y$;

8) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;

9) $x^y = y^x$;

10) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$;

11) $2y\ln y = x$;

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

13) $\sin(xy) + \cos(xy) = \mathrm{tg}(x + y)$.

2.3.3 Обчислити похідну $\frac{dy}{dx} = y'_x$ функцій, заданих параметрично.

1) $\begin{cases} x = a\sin\varphi\,, \\ y = b\cos\varphi\,, \end{cases}$ $\{a, b\} = const > 0.$

2) $\begin{cases} x = 3\cos^2\varphi\,, \\ y = 2\sin^2\varphi. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a\cdot(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a\cdot(1 - \cos\varphi), \end{cases}$ $a = const > 0.$

4) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2)\,, \\ y = t - \mathrm{arctg}t\,. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{1}{t^2-1}\,. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = e^t\sin t\,, \\ y = e^t\cos t\,. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

8) Знайти $\frac{dy}{dx} = y'_x$ та $y'_x\big|_{t=\frac{\pi}{4}}$ для

$$\begin{cases} x = \mathrm{tg}t + t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

2.3.4. Обчислити похідні функцій.

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$;   2) $y = (\ln x)^x$;

3) $y = x^3 e^{x^2}\sin 2x$;   4) $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

5) $y = x^{x^2}$;   6) $y = x^{x^x}$;

7) $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2(x+4)^2}}$.

[Відповіді.](#)

Тема 2.4. Похідні вищих порядків явно заданої функції. Механічний зміст похідної другого порядку. Похідні вищих порядків неявно заданої функції. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції.

Похідні вищих порядків явно заданої функції

$$y''(x) = [y'(x)]';\; y'''(x) = [y''(x)]', \dots,\; y^{(n)}(x) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Для похідної n −го порядку добутку функцій $u(x)v(x)$ має місце формула Лейбніца:

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x)\,,$$

де $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Наведемо формули похідних n −го порядку для деяких функцій:

$$(a^x)^{(n)} = a^x (lna)^n,$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & n \le m;\; m, n \in N, \\ 0 & ,n > m, \end{cases}$$

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a},$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}},$$

$$(\sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Похідні вищих порядків від функцій, заданих неявно

Для того щоб знайти похідну другого порядку y'' функції $y = y(x)$, яка задана в неявному вигляді $F(x, y) = 0$, потрібно знайти першу похідну, а потім продиференціювати отриману тотожність за x і в отримане співвідношення підставити вираз для першої похідної.

Продовжуючи диференціювання, можна отримати одну за одною послідовно похідні вищих порядків, причому всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і функцію y.

Похідні вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція $y = f(x)$, яку задано параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, диференційовна на (a, b) $(t \in (\alpha, \beta)$), то похідні функції $f(x)$ обчислюються за формулами

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2}(t) = \left(y'_x(t)\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{t^2} \cdot x'_t - x''_{t^2} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}, \quad \ldots \; y^{(n)}_{x^n}(t) = \left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}(t)\right)'_t \frac{1}{x'_t}.$$

2.4.1. Знайти похідні вищих порядків.

1) $y = (x^2 + 1)\sin x$, $y^{(20)}(x) = ?$

2) $y = (x^3 + 2)e^{4x+3}$, $y^{(4)}(x) = ?$

3) $y = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}(x) = ?$

4) $y = \mathrm{arctg}x$, $y''(1) = ?$

5) $y = x^3 \ln x$, знайти $y^{(4)}(1) = ?$

6) $y = \frac{1}{1-x}$, $y^{(n)}(x) = ?$

2.4.2. Знайти похідні вищих порядків.

1) $y = (x^2 + 1)^3$, знайти y'';

2) $y = (1 + x^2)\mathrm{arctg}x$, знайти y'';

3) $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$, знайти y'';

4) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, знайти y'';

5) $y = e^{\sqrt{x}}$, знайти y'';

6) $y = x^x$, знайти y'';

7) $y = x\ln x$, знайти $y^{(n)}$;

8) $y = \frac{x}{x^2-1}$, знайти $y^{(n)}$;

9) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$, знайти $y^{(n)}$.

2.4.3.

1) Довести, що функція $y = e^x \sin x$ задовольняє співвідношення

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

а функція $y = e^{-x} \sin x$ - співвідношення

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2) Довести, що функція $y = \frac{x-3}{x+4}$ задовольняє співвідношення

$$2(y')^2 = (y-1)y''.$$

3) Довести, що функція $y = (x^2-1)^n$ задовольняє співвідношення

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

2.4.4. Знайти похідні вказаного порядку.

1) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, знайти y'';

2) $e^{x+y} = xy$, знайти y'';

3) $s = 1 + te^s$, знайти $\frac{d^2s}{dt^2}$.

4) $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

5) $y = \sin(x+y)$, знайти y''.

2.4.5. Знайти похідні другого порядку $\left(\frac{d^2y}{dx^2} =?\right)$.

1) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 - 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1-\cos\varphi). \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

2.4.6.

1) Довести, що функція $y = f(x)$, яка задана параметрично рівняннями $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, задовольняє рівність

$$36y''\left(y - \sqrt{3x}\right) = x + 3.$$

2) Довести, що функція $y = f(x)$, яка задана параметрично рівняннями $x = e^t \mathrm{sin}t$, $y = e^t \mathrm{cos}t$, задовольняє рівність

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y).$$

Відповіді.

Тема 2.5. Диференціал функції: означення та геометричний зміст. Основні властивості диференціалів. Інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала в наближених обчисленнях. Диференціали вищих порядків.

Диференціал функції

Диференціал функції першого порядку

Якщо відома похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$, то її диференціал знаходиться за формулою

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціали вищих порядків позначають так:

$$d^2y = d(dy);\ d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Диференціали порядку вище першого не мають властивості інваріантності (на відміну від диференціала першого порядку).

Якщо x —незалежна змінна, то

$$d^2y = d(y'dx) = y''(dx)^2 + y'd(dx) = y''(dx)^2,$$

якщо ж $x = \varphi(t)$, то

$$d^2y = d(y'dx) = y''(dx)^2 + y'd(dx) = y''(dx)^2 + y'd^2x .$$

2.5.1. Знайти диференціали функцій.

1) $y = \sqrt{1 + \mathrm{ctg}3x}$;
2) $y = (x^2 + 4x + 1)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$;

3) $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$;
4) $y = \left(x^2 - 2\sqrt{x} + 2\right)^3$;

5) $y = e^{\ln \mathrm{tg}x}$;
6) $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

7) $y = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$;
8) $y = \sqrt{\mathrm{arctg}x} - (\arcsin x)^2$;

9) $y = 3\arcsin x - 4\,\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\arccos x - \frac{7}{2}\mathrm{arcctg}x$;

10) $\rho = k\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2.5.2. Знайти диференціали складеної функції.

1) $s = \cos^2 z,\ z = \frac{t^2-1}{4}$;

2) $s = e^z,\ z = \frac{1}{2}\ln t,\ t = 2u^2 - 3u + 1$;

3) $z = \operatorname{arctg} v,\ v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$.

2.5.3. Обчислити наближено за формулою

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

1) $y(x) = e^{0,1x(1-x)}$, $y(1{,}05) = ?$

2) $(1{,}03)^6$;

3) $\sqrt[5]{31}$;

4) $\sqrt{\frac{x+3}{x}}$, $y(1{,}04) = ?$

5) $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$;

6) $\operatorname{arctg}(0{,}97)$;

7) $\operatorname{arctg}(1{,}02)$;

8) $\arcsin(0{,}4983)$;

9) $\sin 44°$.

2.5.4. Знайти наближене значення приросту функції $y = \operatorname{tg} x$ у разі зміни x від 45° до $45^\circ 10'$.

2.5.5. Знайти диференціали від функцій.

1) $y = (x+1)^3(x-1)^2$, знайти d^2y;

2) $y = 4^{-x^2}$, знайти d^2y;

3) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$, знайти d^2y;

4) $\rho^2\cos^3\varphi - a^2\sin^3\varphi = 0$, знайти $d^2\rho$;

5) $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2},\ x = \operatorname{tg} t$, знайти d^2y через: а) x і dx; б) $t\ i\ dt$;

6) $y = \sin z,\ z = a^x,\ x = t^3$, знайти d^2y через: а) z і dz; б) $x\ i\ dx$; в) $t\ i\ dt$;

7) $y = x^m$, знайти d^3y;

8) $y = \cos^2 x$, знайти d^3y.

Відповіді.

Тема 2.6. Основні теореми диференціального числення. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей різних виглядів. Дотична та нормаль до кривої.

Основні теореми диференціального числення

Теорема Ролля.

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервно-диференційовною на відрізку $[a; b]$ та на кінцях цього відрізка набуває однакових значень: $f(a) = f(b)$, тоді існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій похідна цієї функції дорівнює нулю: $f'(c) = 0$.

Теорема Коші.

Нехай задано дві функції $y = f(x)$, $y = g(x)$ які є неперервно-диференційовними на відрізку $(a; b)$ і похідна $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a; b)$, тоді існує точка $c \in (a; b)$ в якій виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Лагранжа.

Нехай функція $y = f(x)$ - неперервно-диференційовна на відрізку $(a; b)$. Тоді знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що виконується рівність

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Ця формула називається формулою Лагранжа (або формулою скінченних приростів).

Правила Лопіталя

Нехай $f(x)$, $g(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0, $g'(x_0) \neq 0$ та

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ (\infty), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ (\infty).$$

Тоді $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, причому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Якщо маємо невизначеності типу $[1^\infty], [0^\infty]$, $[\infty^0]$, то потрібно знайти границю логарифма цього виразу, а потім повернутись до границі самої функції.

Дотична та нормаль до кривої

Нехай існує похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 і вона відмінна від нуля: $f'(x_0)\neq 0$. Дотичною до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ називають пряму

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

а нормаллю до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ - пряму, проведену в точці дотику перпендикулярно до дотичної:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Коефіцієнт $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута, який дотична утворює з додатнім напрямом осі OX: $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$. Якщо $f'(x_0)=\infty$, то пряму $x=x_0$ називають вертикальною асимптотою.

2.6.1. Перевірити теорему Ролля для функції $f(x)=x-x^3$ на $[-1;0]$ та $[0;1]$, знайти точки c_1 та c_2, в яких $f'(c_i)=0$; $i=1,2$.

2.6.2. Довести, що для многочлена

$$P(x)=(x^2+x+1{,}5)(x+3)(x+2)(x-1)$$

на відрізку $(-3;1)$ знайдеться корінь рівняння $P''(x)=0$.

2.6.3. Застосовуючи теорему Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ на відрізку $[0;1]$, визначте точку $x=c$, що фігурує в теоремі.

2.6.4. Застосовуючи теорему Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0; 2]$, визначте точку $x = c$, що фігурує в теоремі.

2.6.5. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на інтервалі $[-1; 2]$.

2.6.6. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = 4^{\sin x}$ на інтервалі $[0; \pi]$.

2.6.7. Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{4^x-5^x}$;

5) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1}{\cos x-\frac{1}{2}x^2-1}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^4}{6\sin x-6x+x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x]$;

14) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right]$;

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$;

18) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

19) $\lim\limits_{x\to0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

21) $\lim\limits_{x\to0+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$;

22) $\lim\limits_{x\to1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

23) $\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

24) $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

25) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$;

26) $\lim\limits_{\varphi\to a}(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$;

27) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

28) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n\cdot e^{-x})$.

2.6.8. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.

1) $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$;

2) $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = 0$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$.

2.6.9. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $x^2(x+y) =) a^2(x-y)$ у початку координат.

2.6.10. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярної до прямої $2x - 6y + 1 = 0$.

2.6.11. Провести нормаль до лінії $y = x\ln x$ паралельно прямій $2x - 2y + 3 = 0$.

2.6.12. Скласти рівняння дотичних до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис.

2.6.13. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярних до прямої $2x + 4y - 3 = 0$.

2.6.14. На лінії $y = x^2(x-2)^2$ знайти точки, в яких дотичні паралельні осі абсцис.

2.6.15. Знайти кути перетину між лініями, що задані рівняннями:

1) $y = x^2$, $3x - y - 2 = 0$;

2) $y = x^2$, $y^2 = x$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$.

2.6.16. Знайти кути перетину кривих

$$\begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi\,, \\ y = a\sin\varphi\,. \end{cases}$$

2.6.17. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії $\begin{cases} x = 3\cos t\,, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в точці $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

2.6.18. В якій точці еліпса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината спадає з такою ж швидкістю, з якою зростає абсциса ?

Відповіді.

Тема 2.7. Формули Тейлора та Маклорена. Поняття многочлена Тейлора та його залишкового члена. Формули Маклорена для основних елементарних функцій. Застосування.

Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і має $(n+1)$ похідну в цьому околі, то має місце ***формула Тейлора***

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \,,$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in [x_0; x]$ називається залишковим членом у формі Лагранжа, а $P_n(x)$ називається ***многочленом Тейлора***.

Якщо $x_0 = 0$, то маємо ***формулу Маклорена***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, $\xi \in [0; 1]$.

Розклад елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x).$$

2.7.1. Розкласти многочлен $f(x)$ за формулою Тейлора в околі точки $x = x_0$.

1) $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4, \quad x_0 = 4;$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4, \quad x_0 = -1;$

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3, \quad x_0 = 0.$

2.7.2. Знайдіть перші три члени розкладу функції $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 1$. Обчислити наближено $f(1{,}03)$.

2.7.3. Відомо, що функція $f(x)$ є многочленом четвертого порядку, причому

$$f(2) = -1, \qquad f'(2) = 0, \qquad f''(2) = 2, \qquad f'''(2) = -12, \qquad f^{IV}(2) = 24.$$

Обчислити $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

2.7.4. Розкласти за степенями x функцію $f(x)$ до члена, що містить x^3 включно.

1) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = x\cos x$;

3) $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$;

4) $f(x) = e^x \ln(1 + x)$.

2.7.5. Розкласти за степенями $(x - x_0)$ функцію $f(x)$ до члена, що містить $(x - x_0)^4$ включно.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

3) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, $x_0 = 3$.

2.7.6. Обчислити значення функцій із точністю до ε, користуючись формулами Маклорена.

1) $\sqrt[3]{30}$, $\varepsilon = 10^{-4}$; 2) $\sqrt{70}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

3) $\sqrt{e}$, $\varepsilon = 10^{-3}$; 4) $\sqrt[7]{129}$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

5) $\sin 18°$, $\varepsilon = 10^{-3}$; 6) $\cos 10°$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

2.7.7. Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення $\ln 1{,}5$.

2.7.8. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $f(x)$ в околі точки x_0.

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = x^3 \ln x$, $x_0 = 1$.

Відповіді.

Тема 2.8. Диференціальні ознаки монотонності функції. Локальний екстремум функції. Найбільше та найменше значення функції.

Ознаки монотонності функції

Нехай для всіх $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$.

Тоді

- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ зростає, якщо $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x) \nearrow)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ не спадає, якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ спадає, якщо $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x) \searrow)$;
- функція $y = f(x)$ на $(a;b)$ не зростає, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функції, що не зростають і не спадають, називаються монотонними на $(a;b)$, а ті що зростають та спадають - строго монотонними. Інтервали, де функція зростає чи спадає, називають інтервалами монотонності функції.

Теорема.

Нехай існує похідна $y' = f'(x)$ $\forall x \in (a;b)$ тоді, якщо

$f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a;b)$;

$f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Точку $x_0 \in (a;b)$ називають критичною, якщо виконується одна з умов

- $f'(x_0) = 0$;
- $f'(x_0) = \infty$;
- $f'(x_0)$- не існує.

Для того, щоб знайти інтервали монотонності функції $y = f(x)$ треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки функції, що належать області визначення;
4) розбити критичними точками область визначення на інтервали та в кожному визначити знак похідної;
5) зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі.

Локальний екстремум функції

Теорема (достатня умова локального екстремуму).

Нехай $x = x_0$ – критична точка і функція $y = f(x)$ неперервна в ній.

Якщо в деякому околі точки x_0 $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$ і $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$, тобто переходячи через точку x_0 похідна змінює знак з «$+$» на «$-$», то в точці x_0 функція $f(x)$ досягає максимуму.

Якщо в деякому околі точки x_0 $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$ і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$, тобто переходячи через точку x_0 похідна змінює знак із «$-$» на «$+$», то в точці x_0 функція $f(x)$ досягає мінімуму.

Якщо похідна $f'(x)$ не змінює знак, переходячи через точку x_0, то екстремуму в цій точці немає.

Для того, щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$ треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти критичні точки функції $f(x)$ (якщо їх немає, то функція не має екстремумів);
3) дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення;
4) за зміною знаку похідної визначити точки максимумів і мінімумів;
5) знайти ці максимальні та мінімальні значення.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Для того, щоб знайти найбільші та найменші значення функції на відрізку $[a; b]$ треба:

1) знайти критичні точки функції на $[a; b]$;
2) перевірити, які з них належать $[a; b]$;
3) обчислити значення функції у знайдених критичних точках, що належать $[a; b]$ та на кінцях відрізка;
4) серед знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

2.8.1. Знайти інтервали монотонності функцій.

1) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$;

2) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$;

3) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$;

4) $y = x - e^x$;

5) $y = x^2 e^{-x}$;

6) $y = \frac{1}{\ln x}$;

7) $y = \begin{cases} \frac{1}{e}, & x < e, \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq e; \end{cases}$

8) $y = \sin\frac{\pi}{x}$.

2.8.2. Покажіть, що функція $y = x^3 + x$ скрізь зростає.

2.8.3. Покажіть, що функція $y = \mathrm{arctg} x - x$ скрізь спадає.

2.8.4. Знайдіть інтервали монотонності та точки екстремумів функцій.

1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

2) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

3) $y = x - \ln(1 + x)$;

4) $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$;

5) $y = x^2 e^{-x}$;

6) $y = \frac{x}{\ln x}$;

7) $y = x + \cos x$.

2.8.5. Знайти екстремуми функцій.

1) $y = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$;

2) $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$;

3) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x+1}$;

4) $y = x - \ln(1 + x^2)$;

5) $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$;

6) $y = \frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$;

7) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}$;

8) $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$;

9) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

10) $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

2.8.6. Знайти найбільше та найменше значення функцій.

1) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in [-1; 2]$;

2) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2; 2]$;

3) $y = 3x + 2\sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$;

4) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6; 8]$;

5) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1; 2]$;

6) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in [0; 1]$;

7) $y = 2\text{tg}x - \text{tg}^2 x$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$;

8) $y = x^x$, $0{,}1 \le x < \infty$;

9) $y = \text{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $0 \le x \le 1$;

10) $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

11) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Відповіді.

Тема 2.9. Опуклість і вгнутість кривих, точки перегину. Асимптоти кривої. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Опуклість і вгнутість кривих, точки перегину

Нехай задано неперервно-диференційовну функцію $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, яка має також похідну другого порядку $f''(x)$. Якщо $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$, то функція буде вгнутою. Це означає, що графік цієї функції буде знаходитись вище довільної дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точках x: $x \in (a; b)$. Якщо ж $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a; b)$, то функція буде опуклою. Це означає, що графік цієї функції буде знаходитись нижче довільної дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точках x: $x \in (a; b)$.

Якщо $f''(x_0) = 0$ в деякій точці $x_0 \in (a; b)$ і функція з вгнутої переходить в опуклу, або навпаки, то точка x_0 є точкою перегину функції.

Асимптоти кривої

Пряма називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка кривої віддаляється на нескінченість

Виділяють три типи асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

1) Вертикальна асимптота.

Пряма лінія $x = a$ є вертикальною асимптотою функції $y = f(x)$, якщо точка $x = a$ є точкою розриву другого роду (принаймні, одна з границь $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ дорівнює $\pm\infty$).

2) Похила асимптота.

Пряма $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ та } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

де $k \neq 0$ і b дійсні числа, називається похилою асимптотою функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, причому $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ потрібно розглядати окремо.

3) Горизонтальна асимптота.

Пряма $y = b$ називається горизонтальною асимптотою $y = f(x)$ якщо $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, причому $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ потрібно розглядати окремо.

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції, інтервали неперервності та з’ясувати характер поведінки функції при підході до межових точок області визначення та знаходження інтервалів монотонності.
2. З’ясувати, чи буде функція парною, непарною або періодичною.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та інтервали її знакосталості.
4. Знайти похилі, вертикальні та горизонтальні асимптоти функції.
5. Знайти похідну функції, область визначення похідної, нулі похідної, інтервали зростання та спадання, точки екстремуму та значення функції в цих точках.
6. Знайти другу похідну функції, область визначення другої похідної, нулі другої похідної, інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину графіка функції.
7. Побудувати графік функції, використовуючи всі отримані результати дослідження.

2.9.1. Знайти проміжки опуклості та вгнутості функції. Визначити точки перегину.

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $y = 1 - \sqrt[3]{x-2}$;

4) $y = \ln(1 + x^2)$;

5) $y = x\mathrm{arctg}x$;

6) $y = \ln(x^2 - 1)$;

7) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

8) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$;

9) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

2.9.2. Знайти асимптоти функції.

1) $y = \frac{1}{x^2-4x+5}$;

2) $y = 3 + \frac{1}{(x-2)^2}$;

3) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

4) $y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$;

5) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$;

6) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$;

7) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-2}}$;

8) $y = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

2.9.3. Дослідити функції та побудувати їх графік.

1) $y = (x-2)^3(x+1)^2$;

2) $y = \frac{1}{x^2+2x}$;

3) $y = \frac{x}{1-x^2}$;

4) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

5) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$;

6) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;

7) $y = (x-3)\sqrt{x}$;

8) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

9) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$;

10) $y = \frac{e^x}{2x-1}$;

11) $y = x^3e^{-x}$;

12) $y = x - \ln(x^2-1)$;

13) $y = \frac{1+\ln x}{x}$;

14) $y = \ln(\cos x)$;

15) $y = x + \cos x$;

16) $y = x\sin x$;

17) $y = x - 2\operatorname{arctg}x$.

2.9.4. Побудувати графіки функцій, які задано у полярній системі координат.

Вказівка. Функція, яку задано в полярній системі координат, має вигляд

$$\rho = \rho(\varphi) \,,$$

де φ – кут з вершиною в полюсі О, який відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки; ρ – відстань, яка відраховується від полюса вздовж променя, який складає кут φ з полярною віссю, $\rho \geq 0$.

Для того щоб побудувати графік функції $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат, необхідно перш за все знайти область визначення функції, тобто множину тих значень φ, за яких ρ буде невід'ємним: $\rho(\varphi) \geq 0$. Потім визначити поведінку функції за таких значень φ, які прямують до граничних точок області визначення. Знайти точки розриву, з'ясувати їх характер, визначити інтервали неперервності, найбільше та найменше значення φ, нулі функції. За тих значеннях кута φ_0, за яких $\rho'(\varphi_0) = 0$, графік функції буде дотикатись до кола радіуса $\rho_0 = \rho(\varphi_0)$. Об'єднуючи одержані дані, будуємо графік функції $\rho = \rho(\varphi)$.

1) $\rho = \sin 2\varphi$;

2) $\rho = \sin 3\varphi$;

3) $\rho = \cos 4\varphi$;

4) $\rho = \frac{3}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$;

5) $\rho = 2(1 - \cos 2\varphi)$;

6) $\rho = \frac{2}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$;

7) $\rho = 0{,}5(1 - \sin \varphi)$;

8) $\rho = 5 - 3\cos 3\varphi$.

2.9.5. Побудувати графіки функцій, які задано неявно.

Вказівка. Часто у випадках, коли рівняння функції в декартовій системі координат задано неявно, зручно перейти в рівнянні до звичайної полярної системи координат

$$x = \rho\cos\varphi \ \ , \ y = \rho\sin\varphi$$

або до узагальненої системи координат заміною

$$x = a\rho\cos\varphi \ \ , \ y = b\rho\sin\varphi \ \ .$$

Якщо неявно задане рівняння функції при одній з указаних замін можна записати у вигляді $\rho = \rho(\varphi)$, то графік будуємо в полярній системі координат.

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$;

2) $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$;

3) $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{2xy}{\sqrt{6}}$;

4) $(x^2 + y^2)^2 = -xy$;

5) $x^4 + y^4 = 2xy$;

6) $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 = xy$.

2.9.6. Побудувати графіки функцій, які задано параметрично.

Вказівка. Параметричне рівняння плоскої кривої має вигляд

$$x = x(t)\,,\;\; y = y(t),\;\; t \in T.$$

Дослідження та побудова графіка функції проводиться аналогічно тому, як це було зроблено для кривої, заданої явним рівнянням $y = f(x)$.

Обчислюємо похідні $x'_t(t)$ та $y'_t(t)$. Для тих точок, поблизу яких крива є диференційовною функцією, обчислюємо $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$. Знаходимо значення параметра $t = t_1, t_{2,}, \dots, t_k$, за яких хоч би одна з похідних $x'_t(t)$ або $y'_t(t)$ перетворюється в нуль чи не існує (критичні значення t). Визначаємо знак $\frac{dy}{dx}$ у кожному з інтервалів $(t_1; t_2), (t_2; t_3), \dots, (t_{k-1}; t_k)$, а відповідно в кожному з інтервалів $(x_1; x_2), (x_2; x_3), \dots, (x_{k-1}; x_k)$, де $x_i = x(t_i)$, отже отримуємо проміжки зростання (спадання).

Далі обчислюємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad \text{або} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}$$

і визначаємо проміжки опуклості та вгнутості графіка функції, точки перегину. Для знаходження асимптот знаходимо такі значення параметра t, наближаючись до яких x або

y прямують до нескінченності. Завершуємо наші дослідження і будуємо графік функції $x = x(t),\ \ y = y(t)$.

1) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$;

2) $x = t - \sin t$, $y = 2(1 - \cos t)$;

3) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$;

4) $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$;

5) $x = \ln t$, $y = \mathrm{arctg} t$;

6) $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3} - t$.

Відповіді.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Тема 3.1. Поняття первісної функції та її властивості. Означення невизначеного інтеграла та його властивості. Таблиця основних інтегралів.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.
Вираз

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C – константа інтегрування, називається ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$.

Таблиця основних інтегралів

$\int 0dx = C$	$\int dx = x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$
$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Властивості невизначених інтегралів

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3. $\forall\ K \in R,\ \ K \neq 0$: $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

3.1.1. Довести, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$.

1) $F(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4, \qquad f(x) = 6x^2 - 10x + 7$;

2) $F(x) = (2x^3 + 5)^4 + 5, \qquad f(x) = 24x^2(2x^3 + 5)^3$;

3) $F(x) = 1 - \mathrm{ctg}x - x, \qquad f(x) = \mathrm{ctg}^2 x$;

4) $F(x) = 1 - \cos^2 e^{2x}, \qquad f(x) = 2e^{2x}\sin(2e^{2x})$;

5) $F(x) = x\sqrt{x}(3\ln x - 2), \qquad f(x) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$;

6) $F(x) = 3 + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2-4}$;

7) $F(x) = 2 - \arccos\frac{2x^2}{x^4+1}, \qquad f(x) = \frac{4x}{x^4+1}$.

3.1.2. Заповнити пропущені місця в рівностях.

1) $d(\quad) = 4x^3dx$; 2) $d(\quad) = \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $d(\quad) = \sin x\, dx$; 4) $d(\quad) = \frac{dx}{x}$;

5) $d(\quad) = \frac{dx}{x^2+1}$; 6) $d(\quad) = 3^x dx$.

3.1.3. Відомо, що $\int 3x^2dx = x^3 + C$. Обчислити:

1) $\int 3t^2dt$;

2) $\int 3(2x+9)^2 d(2x+9)$;

3) $\int 3\cos^2 x d(\cos x)$;

4) $\int 3\ln^2(x+3) d(\ln(x+3))$.

Відповіді.

Тема 3.2. Основні методи інтегрування: метод безпосереднього інтегрування, метод внесення під знак диференціала, метод інтегрування частинами, метод заміни змінної.

Заміна змінних

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$. Розглянемо диференційовану функцію $u = u(t)$. Тоді

$$\int f(u(t))u'(t)dt = \begin{vmatrix} x = u(t) \\ dx = u'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(x)dx = F(x) + C = F(u(t)) + C.$$

Одним із найпростіших випадків застосування заміни змінних є наступне правило.

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тоді $\forall\ a \in \mathrm{R},\ a \neq 0,\ b \in \mathrm{R}$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Піднесення під знак диференціала

Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тоді

$$\int f(u(t))u'(t)dt = \int f(u(t))du\,(t) = F(u(t)) + C.$$

Інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані, тоді

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

або

$$\int udv = uv - \int v\,du.$$

3.2.1. Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування.

1) $\int \left(\sqrt{x^5} + 5\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x^5} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

2) $\int \frac{\sqrt{x^5}+x^2 3^x - x}{x^2}dx$;

3) $\int \frac{(1+x^2)^2}{x\sqrt[3]{x}}dx$;

4) $\int \frac{5\cdot 7^x - 2\cdot 6^x}{3^x}dx$;

5) $\int \mathrm{ctg}^2\, x\, dx$;

6) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$;

7) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;

8) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

3.2.2. Обчислити інтеграли

1) $\int \frac{1}{(3x-1)^5} dx$; 2) $\int (7x+4)^5 dx$;

3) $\int \frac{1}{\sqrt{8x+4}} dx$; 4) $\int \frac{1}{6-9x} dx$;

5) $\int \cos(3+8x) dx$; 6) $\int e^{2x} dx$;

7) $\int 3^{9-x} dx$; 8) $\int \frac{1}{\sin^2(4x-1)} dx$;

9) $\int \frac{1}{16+(2x+1)^2} dx$; 10) $\int \frac{1}{1-(x-4)^2} dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{3+(2-5x)^2}} dx$; 12) $\int \frac{1}{\sqrt{4-(3+2x)^2}} dx$.

3.2.3. Обчислити інтеграли методом піднесення під знак диференціала.

1) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$; 2) $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$;

3) $\int \sin x \, e^{\cos x} dx$; 4) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$;

5) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 6) $\int e^x \sin e^x \, dx$;

7) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; 8) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx$;

9) $\int \frac{\cos x}{16+\sin^2 x} dx$; 10) $\int x^4 4^{x^5} dx$;

11) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}} dx$; 12) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$;

13) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$; 14) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3.2.4. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами.

1) $\int x^2 e^{2x} dx$; 2) $\int x 5^x dx$;

3) $\int x \sin 5x \, dx$; 4) $\int (3x-1)\cos x \, dx$;

5) $\int x \ln(x+1) dx$; 6) $\int x \ln^2 x \, dx$;

7) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$; 8) $\int \arccos x \, dx$.

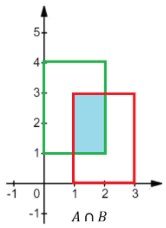
Відповіді.

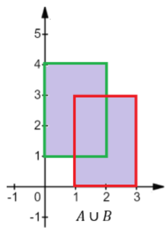
Відповіді

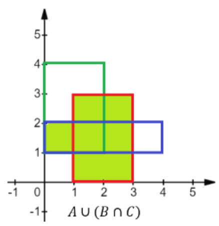
Відповіді до Теми 1.1.

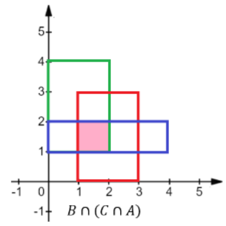
1.1.1. $A \cap B = \{3, 6, 13\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 13\}$, $B \cap (C \cap A) = \{3\}$.

1.1.2. $A \cap B = [0, 5]$, $A \cup B = (-3, 6)$, $A \cup (B \cap C) = (-3,\ 5]$, $B \cap (C \cap A) = [0, 2)$.

1.1.3. 

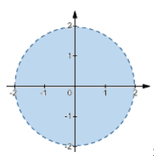
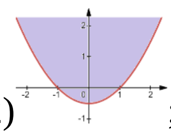
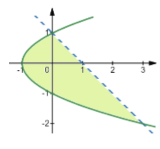
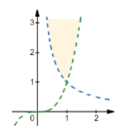
, 

, 

, 

.

1.1.4. 1) $\{-1,\ 0,\ 4\}$; 2) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}$; 3) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$; 4) $\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

1.1.5. 1)  ; 2)  ; 3)  ; 4)  .

1.1.6. 1) $-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}$; 2) $2 \pm \sqrt{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $[-3,\ 1]$; 5) $(-7; -4) \cup (-4; 1)$; 6) $(-\infty; -0{,}5)$.

1.1.9. 1) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8$; 2) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 9,\ a_5 = 17,\ a_6 = 33$; 3) $H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 4,\ H_3(x) = 8x^3 - 24x,\ H_4(x) = 16x^4 - 96x^2 + 48,\ H_5(x) = 32x^5 - 320x^3 + 480x$; 4) $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 1.2.

1.2.1. 1) $b = \sqrt{49 - a^2}$; 2) $S = \frac{\pi l^2}{10}\sqrt{100 - l^2}$; 3) $v = a(t - t_0),\ s = \frac{a}{2}(t - t_0)^2, t \geq t_0$; 4) $m = 0$, якщо $-\infty < x \leq 0$, $m = 2x$, якщо $0 < x \leq 1$, $m = 2$, якщо $1 < x \leq 2$, $m = 3$, якщо $2 < x \leq 3$, $m = 4$, якщо $3 < x < +\infty$.

1.2.2. 1) $y(1) = -1,\ y(-3) = \frac{1}{21},\ y(2)$ - не існує; 2) $f(0) = -\frac{1}{2},\ f(1) = 0,\ f(2) = \frac{1}{4}$, $f(-2)$ – не існує, $g(0) = \frac{1}{2},\ g(1) = 0,\ g(2) = \frac{1}{4},\ f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; 3) $y(1) = 5,\ y(a) = a^2 + 4,\ y(a+1) = a^2 + 2a + 5,\ 3y(2a) = 12a^2 + 12,\ y^2(a-1) = a^4 - 4a^3 + 14a^2 - 20a + 25$; 4)$y(z(1)) = 24,\ y(z(a)) = 8a^3 + 12a^2 + 4a,\ z^2(t) \cdot y(t) = 4t^5 + 4t^4 - 3t^3 - 4t^2 - t$; 8) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\alpha$, де $\alpha -$ кут між січною, що проходить через точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$ та додатним напрямком осі Ox.

1.2.3. 1) $(-\infty,-3) \cup (-3,1) \cup (1,+\infty)$; 2) $[-3,3]$; 3) $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$; 4) $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$; 5) $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$; 6) $(-1,+\infty)$; 7) $\left[-\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right]$; 8) $[-1,2]$; 9) $(2,3)$; 10) $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, k- ціле число; 11) $\left[0,\frac{1}{3}\right]$; 12) $(-\infty,0)$; 13) $[-4,0]$; 14) $[1,4)$; 15) ніде не визначена.

1.2.4 1) парна; 2) непарна; 3) непарна; 4) парна; 5) загального вигляду, 6) непарна; 7) парна; 8) непарна; 9) загального вигляду; 10) непарна; 11) парна; 12) загального вигляду; 13) непарна.

1.2.5. 1) $T = \frac{2\pi}{9}$; 2) T- будь-яке дійсне число; 3) $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $T = \frac{\pi}{2}$; 5) неперіодична; 6) $T = 6\pi$; 7) неперіодична.

1.2.6. 1) $y = -x^2 - 8x - 15$; 2) $y = \frac{x^2-3x+3}{-x^2+x-2}$; 3) $y = \arcsin(2-x) + \cos\sqrt{\arcsin(2-x)}$; 4) $y = 2x\sqrt{1-x^2} + 2x^2$.

1.2.7. так, так, ні.

1.2.8. 1) $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

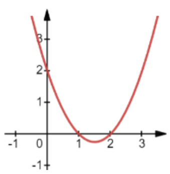
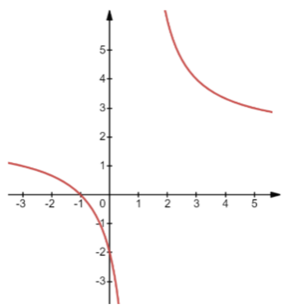
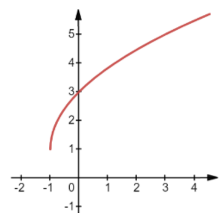
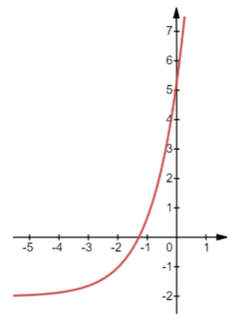
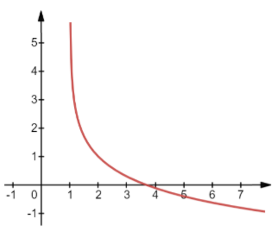
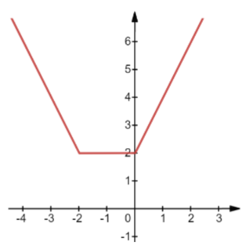
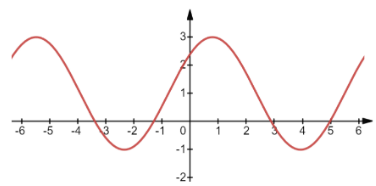
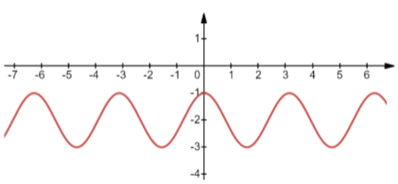
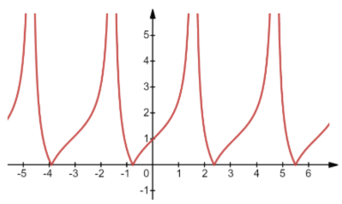
1.2.9. 1) $y = 4x^2 + 10x + 3$; 2) $\operatorname{tg} x$; 3) $y = 1 + 2\operatorname{tg}^2 2x$; 4) $y = x$; 5) $y = \cos(x+1)$; 6) $y = 5^x + 1$.

1.2.10. 1) $y = z^5,\ z = \cos x$; 2) $y = \sqrt[3]{z^2},\ z = 1 + x^6$; 3) $y = \ln t,\ t = \sin z,\ z = 2x$; 4) $y = e^t,\ t = z^2,\ z = 2x + 4$; 5) $y = \sqrt{t},\ t = \operatorname{arctg} v,\ v = \ln z,\ z = x^2 + 1$; 6) $y = v^2,\ u = \sin v,\ v = \sqrt[3]{t},\ t = e^z + 1,\ z = 2x$.

1.2.11. 1) $y = 2 \pm \sqrt{4-x^2}$; 2) $y = \frac{\log_2 x}{x} + 5$; 3) $y = \frac{e^{2x}}{x+3} - 3$; 4) $y = \sqrt[3]{\arcsin\frac{5x^2}{1+2x}}$.

1.2.12. 1) $x \in [-6, 7]$; 2) $y \in [-4, 5]$; 3) з віссю Ox: $x = -2{,}5;\ 0;\ 3{,}5;\ 6{,}5$, з віссю Oy: $y = 0$, 4) $x = -1{,}75;\ -0{,}5;\ 5{,}6;\ 6{,}25$; 5) $x \in [-6, -2{,}5) \cup (0, 3{,}5) \cup (6{,}5,\ 7]$; 6) $x \in (-2{,}5,\ 0) \cup (3{,}5,\ 6{,}5)$; 7) $x \in [-2{,}5, -2{,}25) \cup (-0{,}25, 0) \cup (3{,}5,\ 5] \cup [6{,}4,\ 6{,}5)$; 8) $x \in (-4{,}25, -1) \cup (2,\ 6)$; 9) $x \in (-6, -4{,}25) \cup (-1, 2) \cup (6,\ 7)$; 10) $y_{\text{найм}} = -4$ при $x = -4{,}25$ та $x = 7$, $y_{\text{найб}} = 5$ при $x = -1$.

1.2.13. 1) $y(x) > 0$, якщо $x \in (-3{,}0) \cup (1, +\infty)$, $y(x) < 0$, якщо $x \in (-\infty, -3) \cup (0{,}1)$; 2) $y(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $y(x) < 0$, якщо $x \in (-2{,}0) \cup (0{,}2)$.

1.2.14. 1)  ; 2)  ; 3)  ; 4)  ; 5)  ; 6)  ; 7)  ; 8)  ; 9)  .

[Повернутися до завдань.](#)

Відповіді до Теми 1.3.

1.3.2. 1) $\{1 + n^2, n \geq 0\}$; 2) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n},\ n \geq 0\right\}$; 3) $\left\{\frac{n!}{n+1},\ n > 0\right\}$; 4) $\left\{\frac{n^2}{3^n},\ n \geq 0\right\}$; 5) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n},\ n > 0\right\}$; 6) $\left\{\frac{n+1}{(n+2)n},\ n > 0\right\}$.

1.3.5. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{3}{5}$; 5) 0; 6) $+\infty$, 7) 5; 8) $-\infty$; 9) 0; 10) 0; 11) $+\infty$; 12) -2.

1.3.6. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $+\infty$; 3) 3; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $+\infty$; 6) $\frac{17}{15}$; 7) $-\infty$; 8) 0; 9) $-\frac{12}{7}$; 10) $\frac{16}{3}$; 11) $+\infty$; 12) -3.

1.3.7. 1) 2; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) -4; 5) 0; 6) $-\infty$; 7) 0; 8) 5; 9) 1.

1.3.8. 1) 0; 2) 1; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $+\infty$; 6) 3.

1.3.9. 1) 1; 2) 0; 3) 3; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $-\infty$; 7) 0; 8) 2; 9) 0.

1.3.10. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) -1.

1.3.11. 1) 0; 2) ∞; 3) 0; 4) $1-\sqrt{2}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 0; 7) $-\infty$; 8) $-\frac{5}{2}$.

1.3.12 1) e^3; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{e}$; 4) 0; 5) 0; 6) e^{-2}; 7) 1; 8)e^{-5}; 9) $e^{\frac{1}{2}}$.

1.3.13. 1) 0; 2) 3; 3)$-\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0.

[Повернутися до завдань.]

Відповіді до Теми 1.4.

1.4.3. 1) $\frac{1}{11}$; 2) 2; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$; 6) 2; 7) 0; 8) 0; 9) $+\infty$.

1.4.4. 1) 0, $+\infty$; 2) $+\infty$, 0; 3) 0, 2.

1.4.5. 1) $-\frac{5}{2}$; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) 6; 5) 0; 6) $\frac{3}{2}$; 7) 2; 8) $+\infty$; 9) 0; 10) $\frac{7}{3}$; 11) $-\frac{1}{2}$; 12) 2.

1.4.6. 1) 0; 2) $+\infty$; 3) -2; 4) $+\infty$; 5) 0; 6) 3; 7) -1; 8) 0; 9) $-\infty$.

1.4.7. 1) -1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{3}{8}$; 7) -4; 8) 100.

1.4.8. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -2; 4) 0; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) 3; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $\frac{1}{4}$; 11)* $\frac{1}{2}$. Вказівка: в чисельнику додати і відняти одиницю; 12) $-\frac{1}{4}$.

1.4.9. 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$, якщо $x \to +\infty$, $-\infty$, якщо $x \to -\infty$; 4) 1; 5) 1; 6) $+\infty$; 7) 0.

[Повернутися до завдань.]

Відповіді до Теми 1.5.

1.5.1. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2; 6) $\frac{2}{7}$; 7) $\frac{1}{5}$; 8) 0; 9) $+\infty$; 10) 1; 11) $\frac{1}{36}$; 12)$-e$.

1.5.2. 1) $\frac{18}{5}$; 2) $-\frac{9}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 2; 5) 0; 6) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8)-1; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\cos\alpha$; 11) ∞; 12) 0.

1.5.3. 1) $-\frac{6}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) -2; 6) ∞; 7) $\frac{1}{8}$; 8) 2; 9) $\frac{1}{2\pi}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{4\ln 2}{\pi}$; 12) $-\frac{1}{4\pi}$; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $\frac{5}{18}$.

1.5.4. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 5π; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{\pi^2}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{\pi}$; 8) 0; 9) 1.

1.5.5. 1) 0; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\infty$.

1.5.6. 1) e^{ab}; 2) $\frac{1}{e}$; 3) e^{10}; 4) e^5; 5) $1/e^2$; 6) 0; 7) e; 8) 0; 9) e^3; 10) 0 при $x \to +\infty$, ∞ при $x \to -\infty$; 11) ∞ при $x \to +\infty$, 0 при $x \to -\infty$; 12) 0 при $z \to +\infty$, ∞ при $z \to -\infty$; 13) -4; 14) ∞.

1.5.7. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) 5; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{e}$; 7) $\frac{a}{b}$; 8) e; 9) 2; 10) 1; 11) e^2; 12) e^4; 13) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 14) $e^{\operatorname{ctg} 2}$; 15) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 16) $\frac{1}{e}$; 17) $e^{ctg 1}$; 18) $e^{\frac{1}{3}}$; 19) e^{-1}; 20) e^3; 21) $e^{-\frac{1}{2}}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до теми 1.6.

1.6.5 1) одного порядку малості; 2) одного порядку малості; 3) $\alpha = \mathrm{o}(\beta)$; 4) $\beta = \mathrm{o}(\alpha)$; 5) $\alpha \sim \beta$, 6) $\alpha \sim \beta$, 7) $\alpha = \mathrm{o}(\beta)$; 8) непорівнянні нескінченно малі; 9) одного порядку малості.

1.6.6 1) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{2}$ щодо $\beta(x)$; 2) $\alpha(x)$ нескінченно мала 10-го порядку щодо $\beta(x)$; 3) $\alpha(x)$ нескінченно мала 2-го порядку щодо $\beta(x)$; 4) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{3}$ щодо $\beta(x)$; 5) $\alpha(x)$ нескінченно мала порядку $\frac{1}{2}$ щодо $\beta(x)$.

1.6.7 1) -2; 2) -1; 3) 3; 4) 1; 5) $-\infty$; 6) 8; 7) $\frac{2}{3}$; 8) -1; 9) 5; 10) 1; 11) 0; 12) $-\frac{4}{27}$; 13) $\frac{1}{22}$; 14)$-\frac{1}{2}$; 15) $\frac{81}{20}$; 16) $\frac{2}{e}$; 17) $-\frac{3}{2}$; 18) $\frac{1}{2\ln^2 3}$; 19) $\frac{8}{3}$; 20) $-e^{-5}$; 21) 8.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 1.7.

1.7.1. $A = 6$;

1.7.2. $a = 1$;

1.7.3. $f(0) = 0$;

1.7.4. 1) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $f(2) = \pi$, 2) $x = 2$ - точка розриву 2-го роду, ні.

1.7.5. 1) $x = 2, x = -3$ - точки розриву 2-го роду; 2) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 3) $x = 3$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 4) $x = 2$ - точка розриву 2-го роду; 5)

$x = 1$ - точка розриву 2-го роду; 6) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 7) $x = \pm 3$ - точки розриву 2-го роду; 8) $x = 1$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 9) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 10) $x = -3$ - точка розриву 2-го роду; 11) $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1),\ k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 1-го роду; 12) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = -2$ - точка розриву 2-го роду; 13) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 2-го роду; 14) $x = 0$ - точка розриву 1-го роду, усувна, $x = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - точки розриву 2-го роду; 15) $x = 1, x = 2$ - точки розриву 2-го роду, $x = \frac{3}{2}$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 16) $x = 3$ – усувний розрив; 17) $x = -\frac{3}{2}$ - точка розриву 1-го роду, типу стрибок, 18) $x = 0$ - точка розриву 2-го роду.

1.7.6. 1) в точці $x = 1$ функція неперервна; 2) $x = 2$ - точка розриву 1-го роду; 3) $x = -1$ - точка розриву 1-го роду, стрибок, $x = 2$ - точка неперервності; 4) $x = 0$ - точка розриву 2-го роду, $x = 3$ - точка розриву 1-го роду, стрибок; 5) $x = -\frac{\pi}{2}$ - точка розриву 1-го роду, стрибок, $x = \pi$ - точка розриву 1-го роду, усувна; 6) $x = 1$ - точка розриву 2-го роду, $x = 2$ - точка неперервності; 7) функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 1.8.

1.8.1 1) $x = \sqrt{y - 1} - 1,\ y \in [5, +\infty)$; 2) $x = 1 - e^y,\ y \in (-\infty, \ln 2]$; 3) $x = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

1.8.3 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так.

1.8.5 1) $[1, 2]$; 2) $[0, 1]$; 3) $[3, 4]$.

1.8.6 1) $x_1 \in [-4, -3],\ x_2 \in [-2, -1]$; 2) $x_1 \in [0, 2]$; 3) $x_1 \in [-2, -1],\ x_2 \in [1, 2],\ x_3 \in [5, 6]$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.1.

2.1.1. 1) 0,21; 2) ln 1,2; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\sqrt{2}\cos\left(2a + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.1.2. 1) 4,52; 2) $2{,}5(\sqrt[3]{1{,}8}-1)$; 3) $\sqrt{2}-1$, 4) $-\frac{3}{\pi}$.

2.1.3. 1) $2\Delta x(2+\Delta x),\ 4$; 2) $\sqrt{\Delta x+1}-1,\ \frac{1}{2}$; 3) $\log_2(1+\Delta x),\ \frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{\sin\Delta x}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)\cos\frac{\pi}{3}},\ 4$.

2.1.4. 1) 12; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2; 4) $-\frac{1}{2}$.

2.1.5. 1) $-\frac{1}{15}$; 2) $\frac{2}{7}$, 3) $\frac{12\sqrt{3}}{3\pi}$; 4) 2,5.

2.1.6. 1) $10\ \frac{\text{см}}{\text{хв}}$; 2) $34\ \frac{\text{см}}{\text{хв}}$.

2.1.7. 1) $8{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 2) $10\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

2.1.8. 1) $-16(b-a)\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 2) $-16\sqrt{10}\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; 3) $-32t\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

2.1.9. 1) $4\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$; 2) $40\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$; 3) $4x\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$; де x-довжина AM.

2.1.10. $-\frac{200}{V^2}$.

2.1.11. $8\pi R$, 16π.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.2.

2.2.1. 1) $y'=3x^2+x-5$; 2) $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; 4) $y'=\frac{0{,}1}{\sqrt[4]{x^3}}-10x^2-\frac{0{,}2}{x^3}$; 5) $y'=2x(3x^4-28x^2+49)$; 6) $y'=-x^{-3/2}$; 7) $y'=19+4\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; 8) $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$; 9) $s'=\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$; 10)$y'=\frac{4x+23}{(x+4)\sqrt[3]{x+4}}$; 11) $y'\left(\frac{1}{4}\right)=13$; 12) $s'(0)=\frac{3}{25}$, $s'(2)=\frac{17}{15}$; 13) $F'(0)=11$, $F'(1)=2$, $F'(2)=-1$.

2.2.2. 1) $y'=x^2\sin x$; 2) $y'=2-15\cos^2 x\sin x$; 3) $y'=\frac{\cos x+\sin x-x(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}$; 4) $y'=\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$; 5) $y'=\frac{(1+\mathrm{tg}x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\mathrm{tg}x)^2}$; 6) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{tg}\,x}\cdot\cos^2 x}$; 7) $y'=-3\sin 3x\sin 2(\cos 3x)$; 8) $y'=-\frac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$; 9) $y'=\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$; 10) $y'=\frac{1-4\,\mathrm{tg}^3\,t+7\,\mathrm{tg}^6\,t}{\cos^2 t}$; 11) $y'=(2x-5)\cos(x^2-5x+1)-\frac{6}{x^2\cos^2\frac{6}{x}}$; 12) $y'=\frac{(2x+2\mathrm{cosec}^2 2x)\sin 3x-3(x^2-\mathrm{ctg}2x)\cos 3x}{\sin^2 3x}$.

2.2.3. 1) $y'=\frac{-2x}{1-x^2}$; 2) $y'=\frac{2x}{\ln 3(x^2-1)}$; 3) $y'=\frac{2}{\ln 2}\mathrm{ctg}2x$; 4) $y'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$; 5) $y'=\frac{1}{x\log_5\log_3(\log_5 x)\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ln 5}$; 6) $y'=\frac{\mathrm{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$; 7)6) $y'=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

2.2.4. 1) $y' = \frac{-5\left(1-2\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{x}}$; 2) $y' = \frac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$; 3) $y' = -\frac{2\cdot 10^x \ln 10}{(1+10^x)^2}$; 4) $y' = \frac{2e^x-3^x\ln 3}{3\sqrt[3]{(2e^x-3^x+1)^2}} + \frac{6\ln^5 x}{x}$; 5) $y' = \frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}\cdot 2^{\frac{x}{\ln x}}$; 6) $y' = -12\ln 10\cdot\left(10^{1-\sin^4 3x}\right)\sin^3 3x\cos 3x$; 7) $y' = \frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

2.2.5. 1) $y' = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y' = \arcsin x$; 3) $y' = x\mathrm{arctg}x$; 4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$; 5) $y' = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$; 6) $y' = \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\mathrm{arctg}e^{-2x})^2}$; 7) $y' = -\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arcctg}\,x}} + \frac{3\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $y' = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

2.2.6. 1) $y' = \frac{2x\mathrm{ch}x - x^2\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x}$; 2) $y' = -\mathrm{th}^2 x$; 3) $y' = \frac{-3(x\ln x - \mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{x\ln^2 x\mathrm{sh}^2 x}$; 4) $y' = 3\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}x$; 5) $y' = 2\mathrm{sh}2xe^{\mathrm{ch}^2 x} + \frac{\mathrm{sh}x}{2\sqrt{\mathrm{ch}x}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)} + 2\mathrm{th}(2x)$.

2.2.7. 1) $y' = e^x\sin x\cos^3 x(1+\mathrm{ctg}x - 3\mathrm{tg}x)$; 2) $y' = \frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{\left(9+6\sqrt[5]{x^9}\right)^{10}}}$; 3) $y' = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$; 4) $y' = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$; 5) $y' = \frac{\mathrm{ctg}\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\,e^{3x}}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{(\mathrm{arctg}\,e^{3x})^2}}$;
6) $y' = \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$; 7) $y' = \frac{24x^2}{(1+8x^2)^2}$; 8) $y' = \frac{1+x^4}{1+x^6}$.

2.2.10. 1) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}, x\neq 1$; $\frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}, x\neq 1$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.3.

2.3.1 1) $y' = \sqrt{1-y^2}\cdot e^{-\arcsin y}$ і $y' = \frac{\cos\ln x}{x}$; 2) $t' = \frac{e^t}{1-t}$, 3) $x' = -\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}$, $x' = -\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^2(1+y)^2}}$; 4) Виконується; 5) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2-4}$; 6) $s' = \frac{\sqrt{1-4^s}}{2^s\ln 2}$.

2.3.2 1) $y' = \frac{3ay-2x}{2y-3ax}$; 2) $y' = \frac{e^y}{2-y}$; 3) $y' = -\frac{y\sin(xy)+1}{x}$; 4) $y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$; 5) $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 6) $y' = 2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$; 7) $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$; 8) $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$; 9) $y' = \frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$; 10) $y' = \frac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$; 11) $y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$; 12) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; 13) $y' = -\frac{y\cos^2(x+y)\left(\cos(xy)-\sin(xy)\right)-1}{x\cos^2(x+y)\left(\cos(xy)-\sin(xy)\right)-1}$.

2.3.3. 1) $y' = -\frac{b}{a}\text{tg}\varphi$; 2) $y' = -\frac{2}{3}$; 3) $y' = \text{ctg}\frac{\varphi}{2}$; 4) $y' = \frac{t}{2}$; 5) $y' = \frac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$; 6) $y' = \frac{1-\text{tg}t}{1+\text{tg}t}$; 7) $y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; 8) $y'_x = \frac{2\sin t}{\cos t+\cos^3 t}$, $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}$.

2.3.4. 1) $y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\sin x\right)$; 2) $y' = (\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x} + \ln\ln x\right)$; 3) $y' = x^2 e^{x^2}\sin 2x(3 + 2x^2 + 2x\text{ctg}2x)$; 4) $y' = -\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 5) $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$; 6) $y' = x^{x^x} \cdot x^x\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$; 7) $y' = \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right)\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{(x+4)^2\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.4.

2.4.1. 1) $y^{(20)}(x) = (x^2 - 379)\sin x - 40x\cos x$; 2) $y^{(4)}(x) = 32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19)$; 3) $y^{(n)} = 2\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 6; 6) $y^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

2.4.2. 1) $y'' = 6(5x^4 + 6x^2 + 1)$; 2) $y'' = \frac{2x}{1+x^2} + 2\text{arctg}x$; 3) $y'' = -\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; 4) $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 5) $y'' = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$; 6) $y'' = x^x\left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right]$; 7) $y^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geq 2$; 8) $y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$; 9) $y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

2.4.4. 1) $y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$; 2) $y'' = -\frac{y(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2(y-1)^3}$; 3) $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$; 4) $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3r^2x}{y^5}$; 5) $y'' = -\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$.

2.4.5. 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 9t^3$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$; 4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\sin^3 t\cdot\cos^2 t}$; 5) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{1-t^2}$; 6) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.5.

2.5.1. 1) $dy = -\frac{3dx}{2\sin^2 3x\sqrt{1+\text{ctg}3x}}$; 2) $dy = \left[(2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$; 3) $dy = \frac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$; 4) $dy = 3(x^2 - 2\sqrt{x} + 2)^2\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 5) $dy = e^{\ln\text{tg}x} \cdot \frac{2}{\sin 2x}dx$; 6) $dy =$

$-2^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 7) $dy = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}$; 8) $dy = \frac{1}{2\sqrt{\text{arctg}x}} - \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 9) $dy = \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$; 10) $d\rho = -\frac{k\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$.

2.5.2. 1) $ds = -\frac{t}{2}\sin\frac{t^2-1}{2}$; 2) $ds = \frac{(4u-3)du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 3) $dz = -ds$.

2.5.3. 1) $\approx 0{,}995$; 2) $\approx 1{,}18$; 3) $\approx 0{,}987$; 4) $\approx 1{,}97$; 5) $\approx 0{,}355$; 6) $\approx 0{,}77$; 7) $\approx 0{,}795$; 8) $\approx 0{,}52164$; 9) $\approx 0{,}694$.

2.5.4. $\approx 0{,}00582$.

2.5.5. 1) $d^2y = 4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$; 2) $d^2y = 4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4 - 1)dx^2$; 3) $d^2y = \frac{4\ln x - 4 - \ln^2 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^2$; 4) $d^2\rho = \pm\frac{3a\sec^2\varphi}{4\sqrt{\text{tg}\varphi}}(1+5\text{tg}^2\varphi)d\varphi^2$; 5) а) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1}d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2$; б) $d^2y = -4\sec^2 2t dt^2$; 6) а) $d^2y = \cos z d^2z - \sin z dz^2$; б) $d^2y = a^x\cos(a^x)\ln a d^2x - a^x\ln^2 a\,(a^x\sin a^x - \cos a^x)dx^2$; в) $d^2y = a^{t^2}\ln a\left[\cos a^{t^2}(6t + 9t^4\ln a) - a^{t^2}\sin a^{t^2}9t^4\ln a\right]dt^2$; 7) $d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$; 8) $d^3y = 4\sin 2x$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.6.

2.6.1. Умови теореми виконуються: $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.6.2. Вказівка: Обчислити похідну першого порядку $P'(x)$ і переконатись в рівності $P'(-3) = P'(1)$.

2.6.3. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.6.5. $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{5}{3}$.

2.6.6. $f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

2.6.7. 1) $\frac{24}{49}$; 2) 0; 3) 1; 4) $\frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 4 - \ln 5}$; 5) $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 6) -2; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\cos a$; 9) 2; 10) 1; 11) 1; 12) 16; 13) 0; 14) $\frac{1}{2}$; 15) 0; 16) 1; 17) 1; 18) e; 19) e^2; 20) e^{π}; 21) 1; 22) $-\frac{2}{\pi}$; 23) 0; 24) $\frac{1}{e}$; 25) $\frac{\alpha}{\beta}$; 26) $\frac{4a^2}{\pi}$; 27) $\frac{1}{128}$; 28) 0.

2.6.8. 1) $y=-7x+3$ – дотична; $y=\frac{1}{7}x+\frac{71}{7}$ – нормаль; 2) $y=e$ – дотична; $x=0$ – нормаль; 3) $y+4x+4=0$ – дотична; $8y-2x+15=0$ – нормаль.

2.6.9. $y=x, y=-x$.

2.6.10. $3x+y+6=0$.

2.6.11. $x-y+1=0$.

2.6.12. $y=2x-2, y=2x+2$.

2.6.13. $2x-y\pm1=0$.

2.6.14. $O(0;0)$, $A(1;1), B(2;0)$.

2.6.15. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}, \alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}; \alpha_1=\frac{\pi}{2}, \alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}; \alpha=\operatorname{arctg}3$.

2.6.16. Криві перетинаються в трьох точках під кутами $\alpha_1=\alpha_2=30^\circ$, $\alpha_3=0^\circ$.

2.6.17. $k=-\frac{4}{3}$.

2.6.18. $A\left(3;\frac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 2.7.

2.7.1. 1) $f(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$; 2) $f(x)=(x+1)^3-5(x+1)+8$; 3) $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

2.7.2. $f(x)=1-6(x-1)+(x-1)^2+\cdots$, $f(1{,}03)\approx0{,}82$.

2.7.3. $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$.

2.7.4. 1) $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\cdots$; 2) $f(x)=x-\frac{x^3}{2}+\cdots$; 3) $f(x)=-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\cdots$; 4) $f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$.

2.7.5. 1) $f(x)=-1+\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{9}(x+1)^2+\frac{5}{81}(x+1)^3+\frac{10}{243}(x+1)^4+\cdots$; 2) $f(x)=-1+\frac{9}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{27}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\cdots$; 3) $f(x)=e+\frac{e}{3}(x-3)+\frac{e}{2!3^2}(x-3)^2+\frac{e}{3!3^3}(x-3)^3+\frac{e}{4!3^4}(x-3)^4+\cdots$.

2.7.6. 1) $\approx3{,}1072$; 2) $\approx8{,}367$; 3) $\approx1{,}648$; 4) $\approx2{,}0022$; 5) $\approx0{,}309$; 6) $\approx0{,}9848$.

2.7.7. $0{,}4 < \ln 1{,}5 < 1{,}41,\ \varepsilon = 10^{-2}$.

2.7.8. 1) $f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!(n-1)!2^{4n-2}} + + \frac{(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}\cdot\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, де $0 < \theta < 1$; 2) $f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, де $0 < \theta < 1$; 3) $f(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\,x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n 2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(2\theta x)$, де $0 < \theta < 1$; 4) $f(x) = x - 1 + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 6\,(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \frac{(-1)^{n+1}6\,(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)\cdot[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, де $0 < \theta < 1$.

[Повернутися до завдань.]

Відповіді до Теми 2.8.

2.8.1. 1) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$; 2) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{18}; +\infty\right)$, $f(x) \searrow$ для $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right)$; 3) $f(x) \nearrow$ для $x \in \left(-\sqrt{8}; -2\right) \cup (0; 2)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (-2; 0) \cup \left(2; \sqrt{8}\right)$; 4) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; +\infty)$; 5) $f(x) \searrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; 2)$; 6) $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (e; +\infty)$; 7) $f(x) = const$ для $x \in (-\infty; e)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (e; +\infty)$; 8) $f(x) \nearrow$ для $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3+4k}; \frac{2}{1+4k}\right)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (2; +\infty) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5+4k}; \frac{2}{3+4k}\right)$.

2.8.4. 1) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1), x_{min} = 1, x_{max} = 0$; 2) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (-1; 3), x_{min} = 3, x_{max} = -1$; 3) $f(x) \searrow$ для $x \in (-1; 0)$, $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; \infty), x_{min} = 0$; 4) $f(x) \nearrow$ для $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) \searrow$ для $x \in (0; \infty), x_{max} = 0$; 5) $f(x) \nearrow$ для $x \in (0; 2)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty), x_{min} = 0, x_{max} = 2$; 6) $f(x) \nearrow$ для $x \in (e; +\infty)$; $f(x) \searrow$ для $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, $x_{min} = e$; 7) $f(x) \nearrow$ скрізь.

2.8.5. 1) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = 1$, $y_{min}(1) = 0$, $y_{max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$; 2) $x_1 = -1$ (не входить в область визначення), $x_2 = 1$, $y_{min}(1) = \frac{1}{2}$; 3) $y_{max} = 4$ при $x = 0, y_{min} = \frac{8}{3}$, при $x = -2$; 4) Монотонно зростає; 5) $y_{min} = 2$, при $x = \frac{2}{3}$; 6) $y_{max} = \frac{1}{ln3}$, при $x = -3$; 7) $y_{max} = 2$ при $x = 0, y_{min} = \sqrt[3]{4}$, при $x = 2$; 8) $y_{max} = 2{,}5$ при $x = 1$, $y_{min} = \frac{e(4-e)}{2}$, при $x = e$; 9) $y_{max} = \frac{\sqrt{205}}{10}$ при $x = \frac{12}{5}$, 10) $y_{max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ при $x = \frac{1}{2}$; $y_{min} = 0$, при $x = -1$ і при $x = 5$;

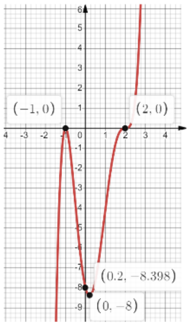
2.8.6. 1) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -13$; 2) $y_{max} = 13$, $y_{min} = 4$; 3) $y_{max} = 16$, $y_{min} = 0$; 4) $y_{max} = 10, y_{min} = 0$; 5) $y_{max} = 2, y_{min} = -10$; 6) $y_{max} = 1, y_{min} = \frac{3}{5}$; 7) $y_{max} = 1, y_{min}$ – немає; 8) $y_{min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, y_{max} – немає; 9) $y_{max} = \frac{\pi}{4}, y_{min} = 0$; 10) $y_{max} = \frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}$, $y_{min} = 1$; 11) $y_{max} = \frac{\pi}{2}, y_{min} = -\frac{\pi}{2}$.

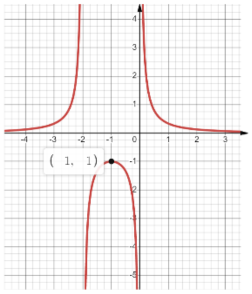
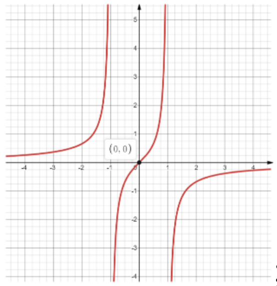
Повернутися до завдань.

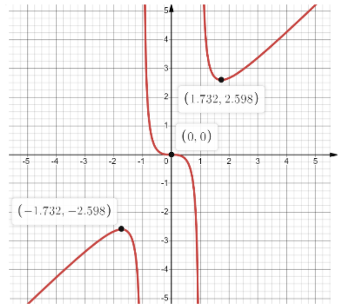
Відповіді до Теми 2.9.

2.9.1. 1) опукла для $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, вгнута для $x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$, точки перегину $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$; 2) опукла для $x \in (2, 4)$, вгнута для $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, точки перегину $y(2) = 62, y(4) = 206$; 3) опукла для $x \in (-\infty, 2)$, вгнута для $x \in (2, +\infty)$, точки перегину $y(2) = 1$; 4) опукла для $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, вгнута для $x \in (-1, 1)$, точки перегину$y(\pm 1) = \ln 2$; 5) скрізь вгнута; 7) опукла для $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, \sqrt{3})$, вгнута для $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, точки перегину $y\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}/4$; $y(0) = 0$; $y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}/4$; 7) скрізь опукла; 8) опукла для $x \in (-3,0) \cup (3, +\infty)$, вгнута для $x \in (-\infty, -3) \cup (0,3)$, точки перегину $y(-3) = -\frac{9}{4}, y(0) = 0, y(3) = \frac{9}{4}$; 9) опукла для $x \in (0,1)$, вгнута для $x \in (1, +\infty)$, точка перегину $y(1) = -7$.

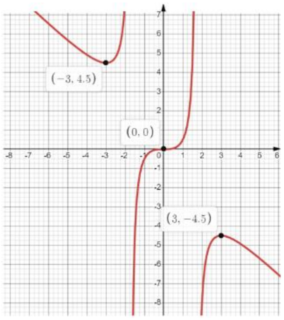
2.9.2. 1) $y = 0$; 2) $x = 2, y = 3$; 3) $= -1, y = \frac{1}{2}x - 1$; 4) $x = -\frac{1}{e},\ y = x + \frac{1}{e}$; 5) $x = 0,\ y = x + 3$; 6) $x = 0, y = 2x$; 7) $x = 2,\ y = x + 1,\ y = -x - 1$; 8) $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$. **2.9.3.** 1)

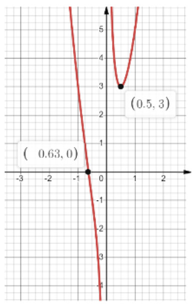


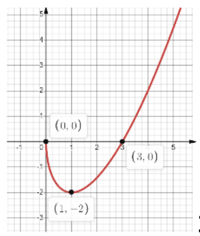
; 2)

; 3)


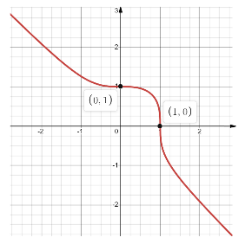
; 4)


;

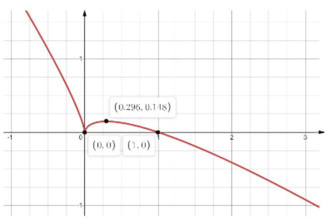
5)


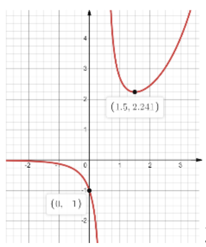
; 6)


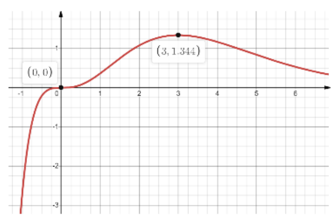
; 7)


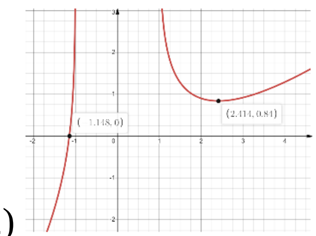
; 8)


;

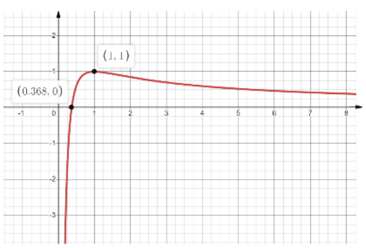
9)


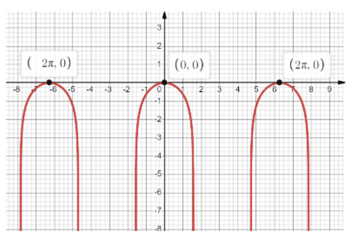
; 10)


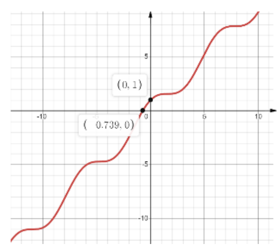
; 11)


; 12)


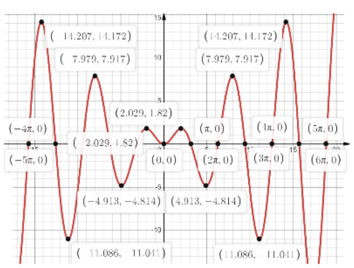
;

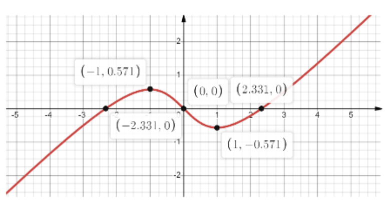
13)


; 14)


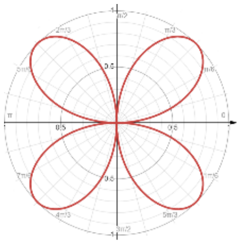
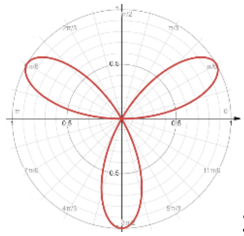
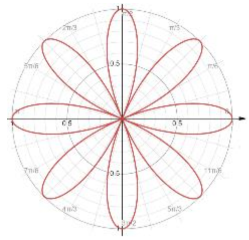
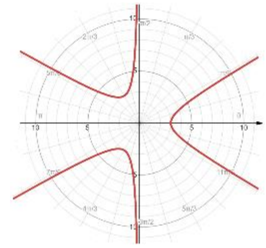
; 15)


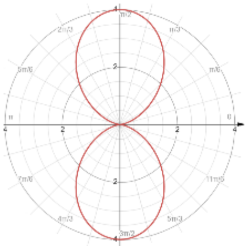
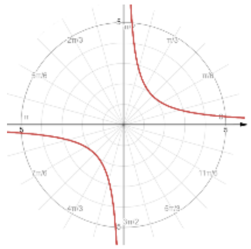
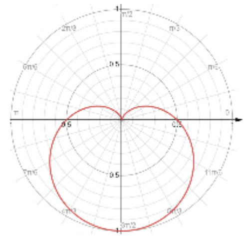
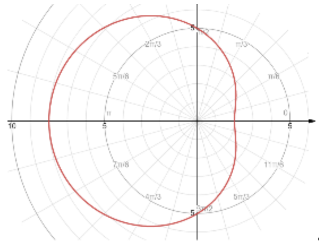
;

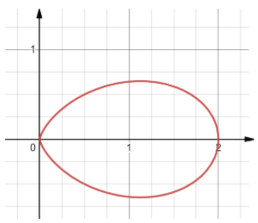
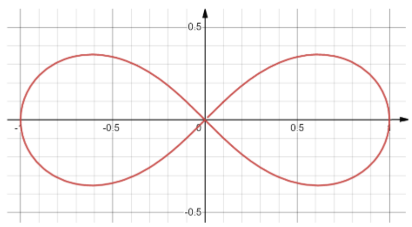
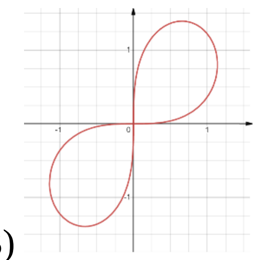
16)


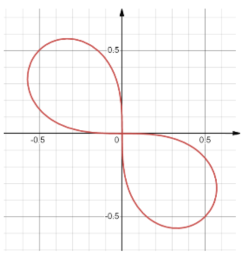
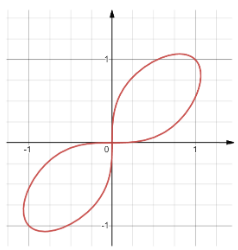
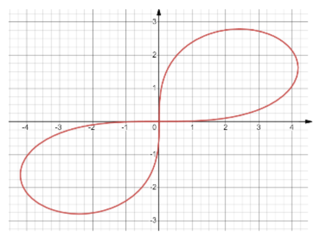
; 17)


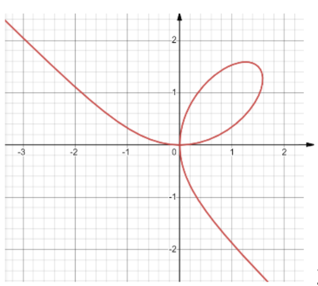
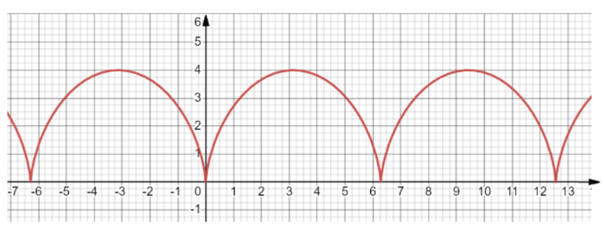
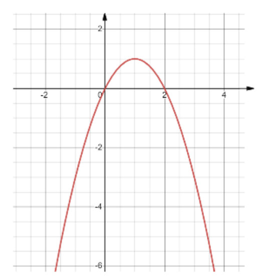
.

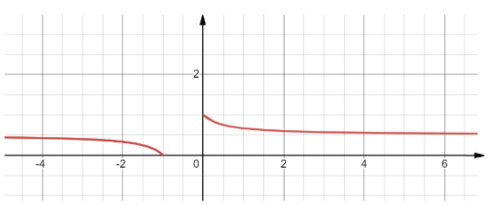
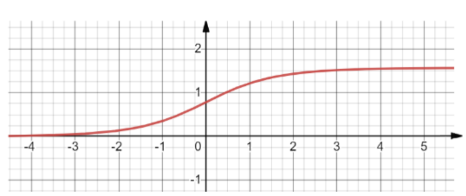
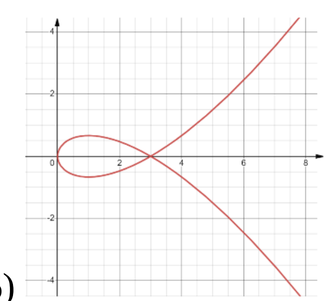
2.9.4. 1)  ; 2)  ; 3)  ; 4)  ;

5)  ; 6)  ; 7)  ; 8)  .

2.9.5. 1)  ; 2)  ; 3)  ;

4)  ; 5)  ; 6)  ;

2.9.6. 1)  ; 2)  ; 3)  ;

4)  ; 5)  ; 6)  .

[**Повернутися до завдань.**]()

Відповіді до Теми 3.1.

3.1.2. 1) x^4 ; 2) $2\sqrt{x}$; 3) $-\cos x$; 4) $\ln x$; 5) $\operatorname{arctg} x$; 6) $\frac{3^x}{\ln 3}$.

3.1.3. 1) $t^3 + C$; 2) $(2x+9)^3 + C$; 3) $\cos^3 x + C$; 4) $\ln^3(x+3) + C$.

Повернутися до завдань.

Відповіді до Теми 3.2.

3.2.1. 1) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{15}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{4x^4} - 4\sqrt[4]{x} + \mathrm{C}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3^x}{\ln 3} - \ln x + \mathrm{C}$; 3) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + \mathrm{C}$; 4) $\frac{5\cdot 7^x}{3^x \ln\frac{7}{3}} - \frac{2\cdot 2^x}{\ln 2} + \mathrm{C}$; 5) $-\operatorname{ctg}x - x + \mathrm{C}$; 6) $x - \sin x + \mathrm{C}$; 7)$\frac{1}{2}\operatorname{tg}x + \frac{1}{2}x + \mathrm{C}$; 8)$-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}x + \mathrm{C}$.

3.2.2. 1) $-\frac{1}{12(3x-1)^4} + \mathrm{C}$; 2) $\frac{1}{42}(7x+4)^5 + \mathrm{C}$; 3) $\frac{1}{8}\sqrt{8x+4} + \mathrm{C}$; 4) $-\frac{1}{9}\ln|6-9x| + \mathrm{C}$; 5) $\frac{1}{8}\sin(3+8x) + \mathrm{C}$; 6) $\frac{1}{2}e^{2x} + \mathrm{C}$; 7) $-\frac{3^{9-x}}{\ln 3} + \mathrm{C}$; 8) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x-1) + \mathrm{C}$; 9) $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4} + \mathrm{C}$; 10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-5}\right| + \mathrm{C}$; 11) $-\frac{1}{5}\ln\left|2-5x+\sqrt{3+(2-5x)^2}\right| + \mathrm{C}$; 12) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{3+2x}{2} + \mathrm{C}$.

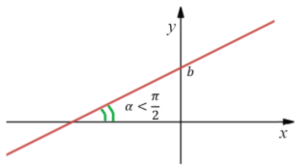
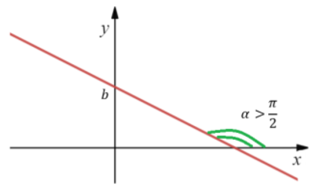
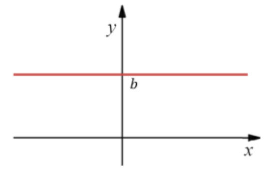
3.2.3. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + \mathrm{C}$; 2) $\frac{1}{4}\ln|1+x^4| + \mathrm{C}$; 3) $-e^{\cos x} + \mathrm{C}$; 4) $\ln|\ln x| + \mathrm{C}$; 5) $\frac{1}{2}\sin\sqrt{x} + \mathrm{C}$; 6) $-\cos e^x + \mathrm{C}$; 7) $e^{\operatorname{tg} x} + \mathrm{C}$; 8) $-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \mathrm{C}$; 9) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{4} + \mathrm{C}$; 10) $\frac{4^{x^5}}{5\ln 4} + \mathrm{C}$; 11)$\ln\left|\ln x + \sqrt{1+\ln^2 x}\right| + \mathrm{C}$; 12) $\arcsin e^x + \mathrm{C}$; 13) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + \mathrm{C}$; 14) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x + \mathrm{C}$.

3.2.4. 1) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$; 2) $\frac{5^x}{\ln^2 5}(x\ln 5 - 1) + C$; 3) $-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x - \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C$; 4) $(3x-1)\sin x + 3\cos x + C$; 5) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C$; 6) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$; 7)$\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2} + C$; 8) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

Повернутися до завдань.

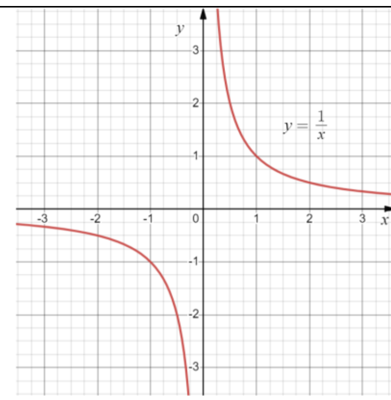
Основні елементарні функції, їхні властивості та графіки

Лінійна функція $y = kx + b$

Похила пряма для $k > 0$ та довільного b	Похила пряма для $k < 0$ та довільного b	Горизонтальна пряма для $k = 0$ та довільного b
		

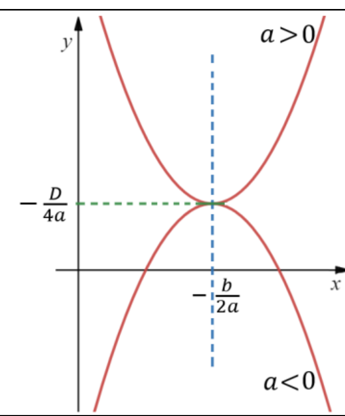
Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$

- Графік функції називається гіперболою;
- $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- Пряма $y = 0$ називається горизонтальною асимптотою;
- Пряма $x = 0$ називається вертикальною асимптотою.



Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

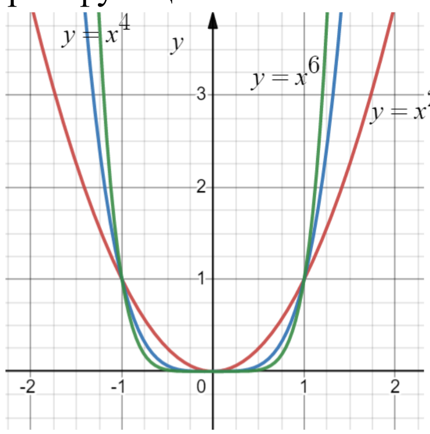
- Графік функції називається параболою;
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $a > 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\frac{D}{4a}, +\infty\right)$;
- $a < 0 \Rightarrow E(f) = \left(-\infty, -\frac{D}{4a}\right)$;
- Вершина параболи $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$;
- Крива має симетрію відносно вертикальної прямої $x = -\frac{b}{2a}$.



Степенева функція $y = x^n, n > 0$ – ціле число

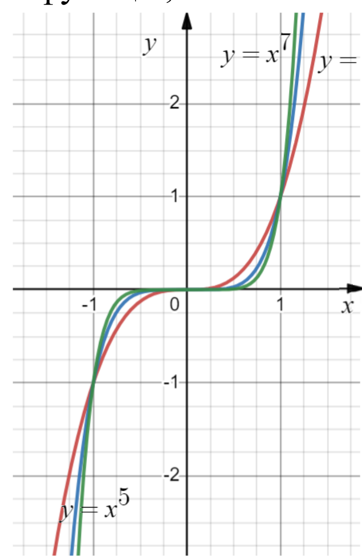
<table>
<tr>
<td>
Якщо n парне, то $y = x^n$

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (±1,1);
- парна функція.



</td>
<td>
Якщо n непарне, то $y = x^n$

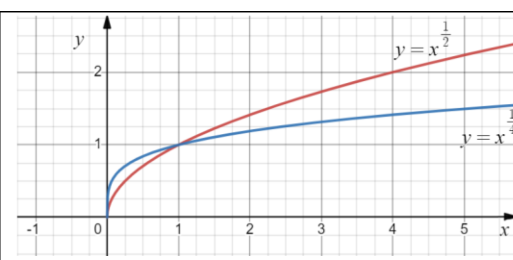
- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1) та (–1,–1);
- непарна функція;



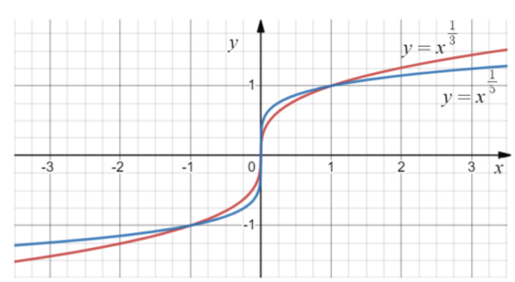
</td>
</tr>
</table>

Обернена степенева функція $y = \sqrt[n]{x}, n > 0$ – ціле число

<table>
<tr>
<td>
Якщо n парне, то $y = \sqrt[n]{x}$

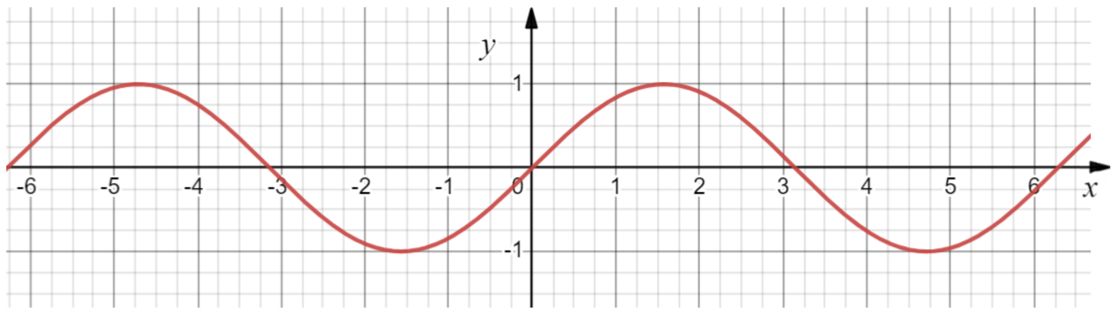
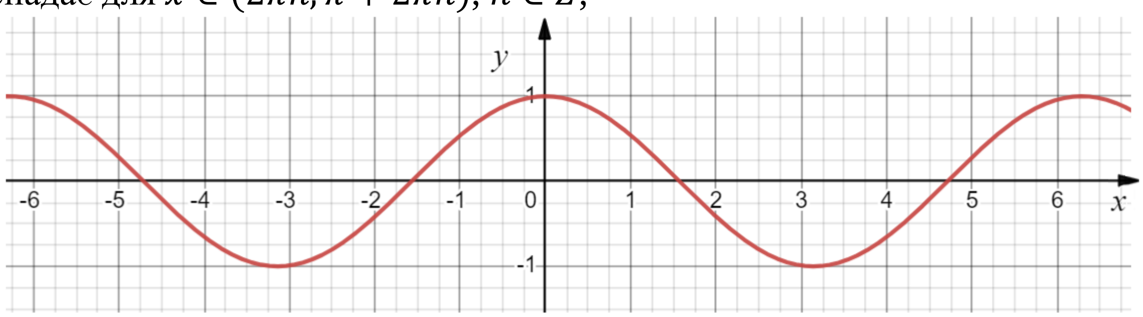
- $D(f) = [0, +\infty)$;
- $E(f) = [0, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1).
</td>
<td>


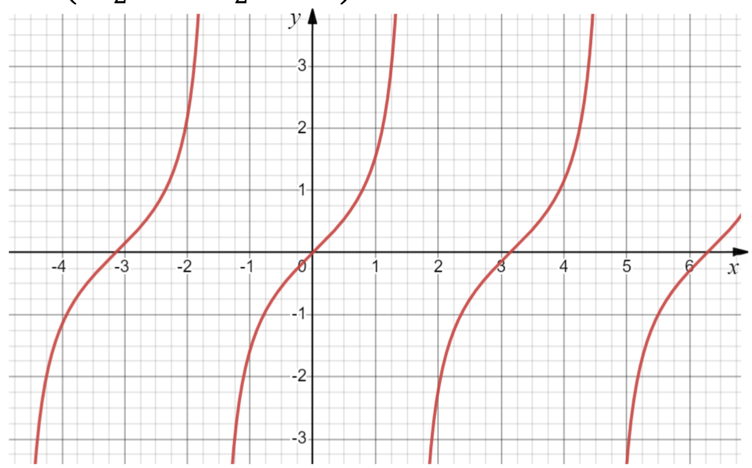
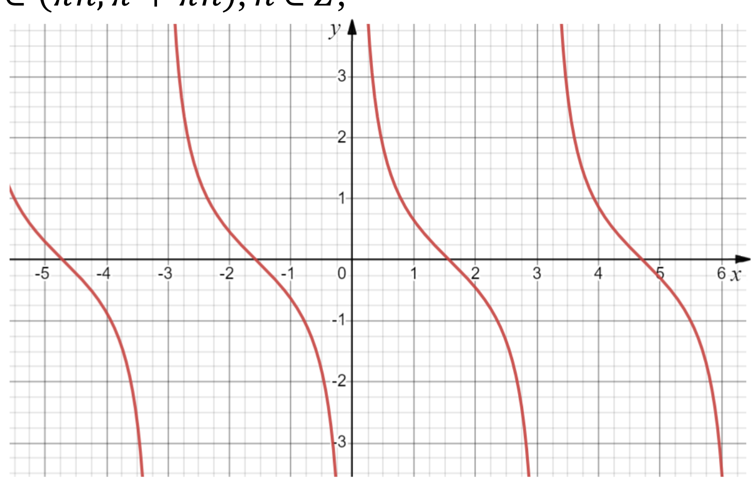
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Якщо n непарне, то $y = \sqrt[n]{x}$

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- завжди проходить через точки (0,0), (1,1) та (–1,–1);
- є непарною функцією.
</td>
<td>


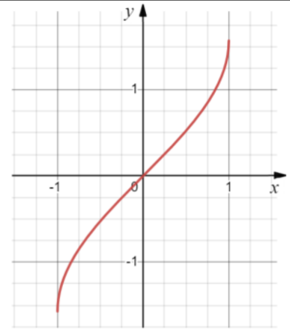
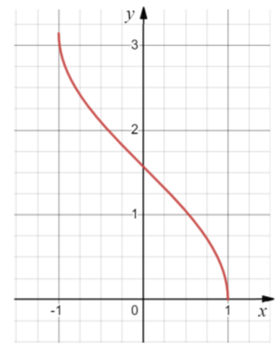
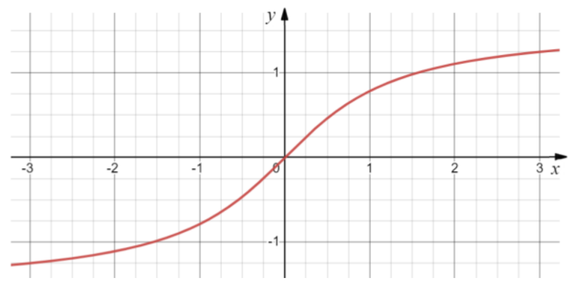
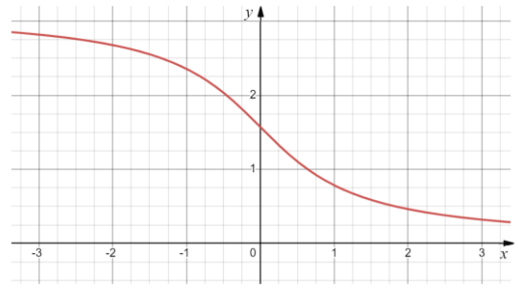
</td>
</tr>
</table>

Тригонометричні функції

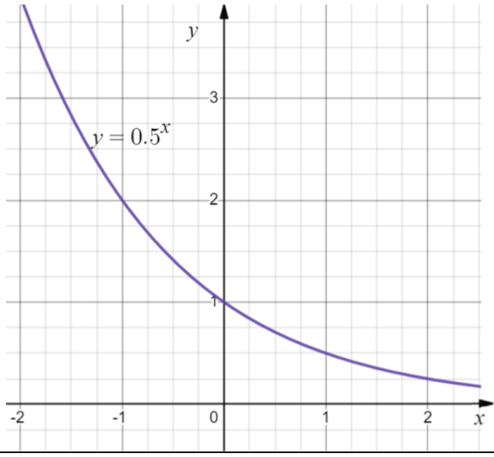
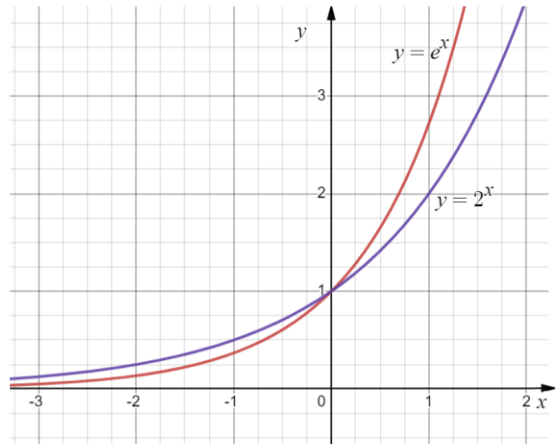
$y = \sin x$	• $D(y) = (-\infty, \ +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • непарна функція; • $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$; • $\sin x > 0 \Rightarrow x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$, • $\sin x < 0 \Rightarrow x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in Z$; • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • спадає для $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; 
$y = \cos x$	• $D(y) = (-\infty, \ +\infty)$; $E(y) = [-1, 1]$; • періодична функція, $T = 2\pi$ – період; • парна функція • $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; • $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • $\cos x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$; • зростає для $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in Z$; • спадає для $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$; 

$y = \operatorname{tg} x$	• $D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n \in \mathrm{Z};\;\; E(y) = (-\infty, \;\; +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z;$ • $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; n \in \mathrm{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ • $\operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in Z;$ • зростає для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ 
$y = \operatorname{ctg} x$	• $D(y): x \neq \pi n, \;\; n \in \mathrm{Z}; \;\; E(y) = (-\infty, \;\; +\infty);$ • періодична функція, $T = \pi$ – період; • непарна функція; • $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$ • $x = \pi n, \;\; n \in \mathrm{Z},$ – вертикальна асимптота; • $\operatorname{ctg} x > 0 \Rightarrow x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z;$ • $\operatorname{ctg} x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right), n \in Z;$ • спадає для $x \in (\pi n, \pi + \pi n), n \in Z;$ 

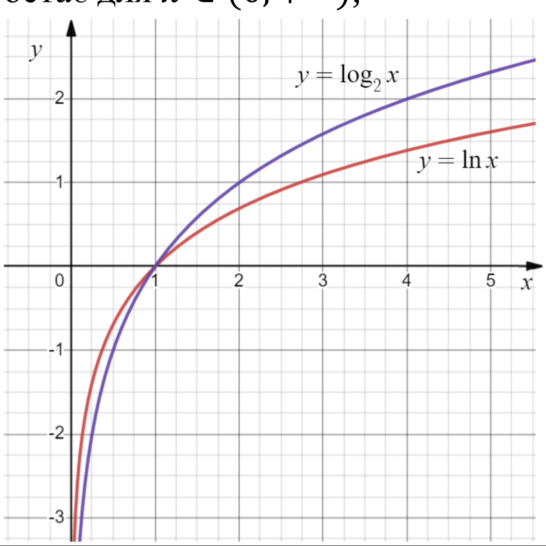
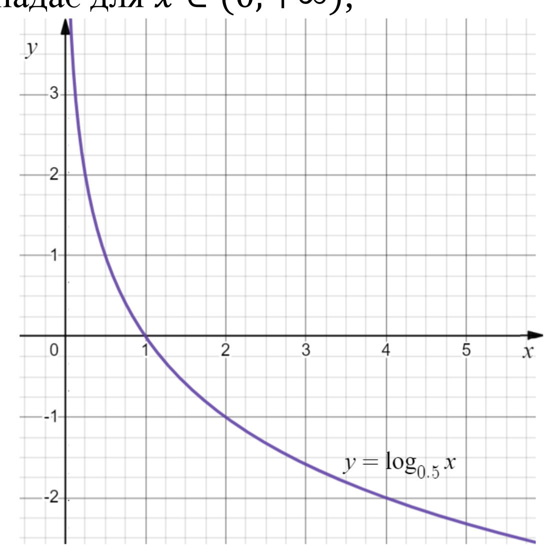
Обернені тригонометричні функції

$y = \arcsin x$	• $D(y) = [-1, 1]$; $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$; • непарна функція; • $\arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0$; • $\arcsin x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1]$; • $\arcsin x < 0 \Rightarrow x \in [-1, 0)$; • зростає для $x \in [-1, 1]$; 
$y = \arccos x$	• $D(y) = [-1, 1]$; $E(y) = [0, \pi]$; • $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; • $\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1$; • $\arccos x > 0 \Rightarrow x \in [-1, 1)$; • спадає для $x \in [-1, 1]$; 
$y = \operatorname{arctg} x$	•$D(y) = (-\infty, \ +\infty)$; $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right)$; • непарна функція; • $\operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow x = 0$; • $y = \pm\frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arctg} x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$; • $\operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$; • зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 
$y = \operatorname{arcctg} x$	• $D(y) = (-\infty, \ +\infty)$; $E(y) = (0, \pi)$; • $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$; • $y = 0$, $y = \pi$ – горизонтальні асимптоти; • $\operatorname{arcctg} x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • спадає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 

Показникова функція

$y = a^x$, $0 < a < 1$	$y = a^x$, $a > 1$
• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (0,\ +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; • точка перетину з віссю ОУ – $(0,\ 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • спадає для $x \in (-\infty, +\infty)$;  	• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • $E(y) = (0,\ +\infty)$; • $a^x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$;; • точка перетину з віссю ОУ – $(0,\ 1)$; • $y = 0$ – горизонтальна асимптота; • зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$; 

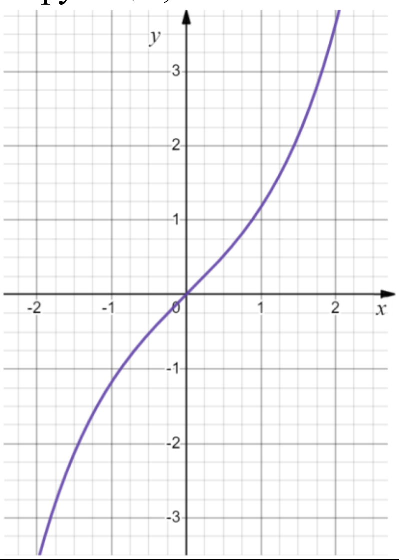
Логарифмічна функція

$y = \log_a x$, $a > 1$	$y = \log_a x$, $0 < a < 1$
• $D(y) = (0,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • x=0 – вертикальна асимптота; • зростає для $x \in (0, +\infty)$;  	• $D(y) = (0,\ +\infty)$; • $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$; • точка перетину з віссю ОХ – $(1, 0)$; • x=0 – вертикальна асимптота; • спадає для $x \in (0, +\infty)$; 

Гіперболічні функції

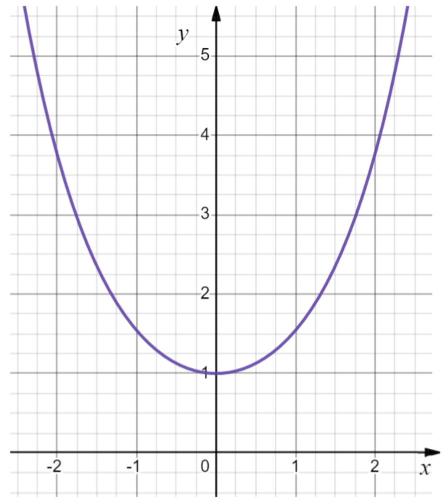
<table>
<tr><th>$y = \operatorname{sh} x$</th><th>$y = \operatorname{ch} x$</th></tr>
<tr><td>

• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$;
• $E(y) = (-\infty,\ +\infty)$;
• $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
• непарна функція;



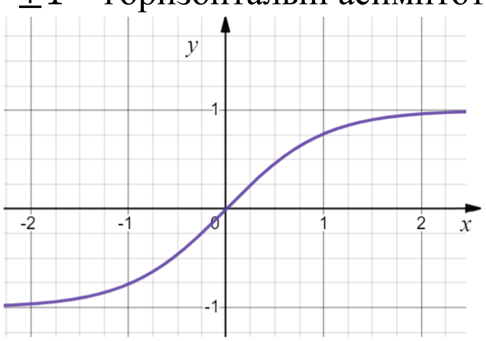
</td><td>

• $D(y) = (-\infty,\ +\infty)$;
• $E(y) = (1,\ +\infty)$;
• $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
• парна функція;



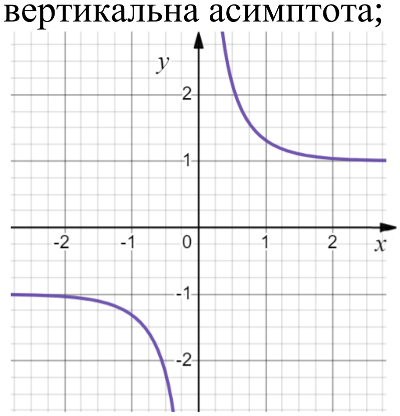
</td></tr>
<tr><th>$y = \operatorname{th} x$</th><th>$y = \operatorname{cth} x$</th></tr>
<tr><td>

•$D(y) = (-\infty,\ +\infty)$;
• $E(y) = (-1,\ 1)$;
• $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;
• $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти;



</td><td>

•$D(y) = (-\infty, 0) \cup (0,\ +\infty)$;
• $E(y) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
• $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
• $y = \pm 1$ – горизонтальні асимптоти;
• x=0 – вертикальна асимптота;



</td></tr>
</table>

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad 1 - \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x; \qquad \operatorname{ch} 2x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

Список використаної літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. G.N. Berman A Problem Book in Mathematical Analysis/ G.N. Berman -Arihant Publications India Limited, – 2018 – 472 p. ISBN-13 : 978-9351762546
3. B. Demidovich Problems in Mathematical Analysis/ B. Demidovich – Mir Publisher – 1976 – 496 p.